Тест для студентов.
Решения.

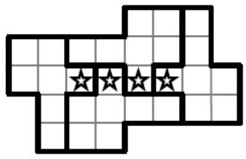
Задача 1. Ученику выдали список книг на лето. Он подсчитал, что если каждую неделю будет читать некоторое одно и то же количество книг, то за 12 недель лета справится со списком. Но каждую неделю он читал на одну книгу меньше планируемого и одолел список на 3 недели позже, чем нужно. На сколько недель раньше срока ученик прочел бы список, если бы каждую неделю читал на одну книгу больше, чем планировал?

Решение. *Первый способ* («арифметический»). За 12 недель ученик не успел прочитать 12 книг. Их он прочитает за 3 недели, то есть ученик читал по 4 книги в неделю, а планировал читать по 5 книг. Следовательно, в списке – 60 книг. Если бы он читал по 6 книг в неделю, то справился бы за 10 недель, то есть на две недели раньше срока.

Второй способ («алгебраический»). Пусть ученик хотел читать по x книг в неделю, тогда в его списке $12x$ книг. Но он каждую неделю читал $(x – 1)$ книгу и потратил на это 15 недель, то есть в списке $15(x – 1)$ книг. Таким образом, $12x = 15(x – 1)$, откуда $x = 5$. Значит, в списке – 60 книг. Если читать по 6 книг в неделю, то 10 недель, то есть на 2 недели раньше окончания каникул.

Ответ: на две недели.

Задача 2. Разрезать фигуру по линиям на 4 равные части так, чтобы в каждой части было по звездочке.



Замечание: разрезать нужно именно на равные фигуры, разрезание на равновеликие фигуры разной формы не является правильным ответом.

Задача 3. При сушке 100 кг смеси из слив и абрикосов процентное содержание воды в них снизилось с 99% до 98%. Какова масса получившихся при этом сухофруктов?

Решение. В 100 кг сливово-абрикосовой смеси содержится 99% воды и 1% твердого вещества, а значит, масса твердого вещества равняется 1%·100 кг = 1 кг. В сухофруктах этот 1 кг твердого вещества составляет уже 2%, а значит, общая масса сухофруктов равняется 1 кг : 2% = 50 кг.

Ответ: 50 кг.

Задача 4. Петя, Гена, Дима и Вова занимаются в спортивных секциях: гимнастической, баскетбольной, волейбольной и легкой атлетики. Волейболист старше Пети и Димы, но учится с ними в одном классе. Петя и Гена на тренировки ходят пешком вместе, а гимнаст ездит на автобусе. Легкоатлет не знаком ни с баскетболистом, ни с волейболистом. Кто в какой секции занимается?

Решение. Петя не является ни волейболистом (так как волейболист старше Пети), ни гимнастом (так как гимнаст ездит на автобусе, а Петя ходит пешком), ни легкоатлетом (так как легкоатлет не знаком с двумя мальчиками, а Петя знаком с Димой и Геной), значит, Петя – баскетболист. Тогда Дима не может быть ни волейболистом, ни баскетболистом, ни легкоатлетом, следовательно, Дима – гимнаст. Поскольку легкоатлет не знаком с Петей, то легкой атлетикой занимается Вова.

Ответ: Петя — баскетбол, Гена — волейбол, Дима — гимнастика, Вова — легкая атлетика.

Задача 5. Среди 101 одинаковых по виду монет одна фальшивая, отличающаяся по весу. Как с помощью чашечных весов без гирь за два взвешивания определить, легче она остальных или тяжелее? Находить фальшивую монету не требуется.

Решение. Взвешиваем по 50 монет. Возможны два случая.

Первый случай: равенство. Берем оставшуюся монету и кладем ее на левую чашу весов вместо одной из имеющихся там. Тогда, если левая кучка тяжелее, то фальшивая монета тяжелее; а если левая кучка легче, то фальшивая монета легче.

Второй случай: неравенство. Берем более тяжелую кучку и разбиваем ее на две кучки по 25 монет. Тогда, если весы в равновесии, то фальшивая монета легче, если же вес кучек неодинаковый, то фальшивая монета тяжелее.

Задача 6. Найти все натуральные числа, которые увеличиваются в 16 раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить девять.

Решение. Пусть a – последняя цифра исходного числа, b – число, составленное из всех цифр исходного числа, кроме последней. Тогда исходное число равно $10a + b$, а новое число равно $100a + 90 + b$. Имеем уравнение $100a + 90 + b = 16(10a + b)$. Отсюда $6 = 4a + b$, а значит, $4a \le 6$. Так как $a \ne 0$, то $a = 1$ и b=2.

Ответ: 12.

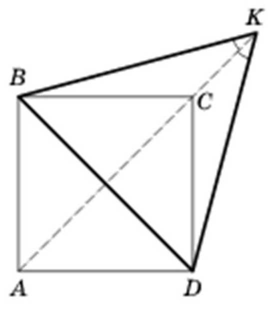
Задача 7. На доске записаны 10 различных квадратных трехчленов. Оказалось, что любые два из них имеют общий корень. Обязательно ли, что все они имеют общий корень?

Решение. Пусть записаны квадратные трехчлены: $x^2 - x$, $x^2 + x$, $x^2 - 1$, $2x^2 - 2$, $3x^2 - 3$, $4x^2 - 4$, $5x^2 - 5$, $6x^2 - 6$, $7x^2 - 7$, $8x^2 - 8$. Первый трехчлен имеет корни 0 и 1, второй – 0 и (-1), остальные – 1 и (-1). Видно, что любые два трехчлена имеют общий корень, но общего корня для всех десяти трехчленов не существует.

Ответ: нет.

Задача 8. На продолжении диагонали AC квадрата $ABCD$ за точку C отмечена точка K, что BK=AC. Найти $\angle BKC$.

Решение. Треугольники ABK и ADK равны, так как сторона AK – общая, $AB = AD$, $\angle BAK = \angle DAK = 45°$. Значит, $BK = DK = AC = BD$, и треугольник BKD – равносторонний, $\angle BKD = 60°$. В силу равенства треугольников, $\angle BKC = \angle DKC = 30°$.



Ответ: 30°.