Обобщенные матрицы и некоторые аддитивные вопросы теории колец

Норбосамбуев Ц. Д.

РНОМЦ ТГУ

2020

$(R, {}_R M_S, {}_S N_R, S, \varphi, \psi)$ — Контекст Мориты [1] [2].

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \middle| \, r \in R, s \in S, m \in M, n \in N \right\}.$$

Пусть $\varphi : M \otimes_S N \longrightarrow R$, $\psi : N \otimes_R M \longrightarrow S$.
Положим $\varphi(m \otimes n) = mn$ и $\psi(n \otimes m) = nm$ для всех $m \in M$ и $n \in N$. Тогда

$$\begin{pmatrix} r_1 & m_1 \\ n_1 & s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 & m_2 \\ n_2 & s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 r_2 + m_1 n_2 & r_1 m_2 + m_1 s_2 \\ n_1 r_2 + s_1 n_2 & n_1 m_2 + s_1 s_2 \end{pmatrix},$$
$$r_1, r_2 \in R, \quad s_1, s_2 \in S, \quad m_1, m_2 \in M, \quad n_1, n_2 \in N. \qquad (1)$$

Также для всех $m, m' \in M$ и $n, n' \in N$ должны выполняться равенства ассоциативности $(mn)m' = m(nm')$ и $(nm)n' = n(mn')$.

[1] Morita K. Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition / K. Morita // Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Diagaku Sect. – 1958. – V. 6. – P. 83–142.
[2] Shapiro J. Morita contexts / J. Shapiro, P. Loustaunau // Non-Commutative Ring Theory. Lecture Notes in Mathematics. – 1990. – V. 1448. – P. 80–92.

Обобщенные матрицы

Определение

Множество K образует кольцо, называемое кольцом контекста Мориты или ***кольцом обобщенных матриц (КОМ)****, или* ***кольцом формальных матриц (КФМ)****.*

1) Пусть T — кольцо, содержащее нетривиальный идемпотент e.

$$K = \begin{pmatrix} eTe & eT(1-e) \\ (1-e)Te & (1-e)T(1-e) \end{pmatrix},$$

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} exe & ex(1-e) \\ (1-e)xe & (1-e)x(1-e) \end{pmatrix} \text{ — изоморфизм.}$$

2) Пусть G — правый модуль над некоторым кольцом T. Допустим, существует нетривиальное прямое разложение $G = A \oplus B$. Тогда имеет место изоморфизм колец

$$\mathrm{End}_T(G) \cong \begin{pmatrix} \mathrm{End}_T(A) & \mathrm{Hom}_T(B,\ A) \\ \mathrm{Hom}_T(A,\ B) & \mathrm{End}_T(B) \end{pmatrix}.$$

Обобщенные матрицы

Замечание

Вообще говоря, выбор разных пар гомоморфизмов φ и ψ приводит к разным кольцам формальных матриц.

Отдельно можно отметить так называемую *проблему изоморфизма*. Пусть $K = (R, S, M, N, \varphi, \psi)$ и $K' = (R, S, M, N, \varphi', \psi')$ — два кольца формальных матриц с бимодульными гомоморфизмами φ, ψ и φ', ψ'. Как должны быть связаны эти гомоморфизмы, чтобы существовал изоморфизм $K \cong K'$? Подробно эта проблема разбирается в работах [3] [4] [5] [6] [7] [8]

[3] Крылов П. А. Об изоморфизме колец обобщенных матриц / П.А. Крылов // Алгебра и логика. – 2008. – Т. 47, № 4. – С.456–463.

[4] Krylov P. A. Modules over formal matrix rings / P. A. Krylov, A. A. Tuganbaev // J.Math.Sci. – 2010. – V. 171, N. 2. – P. 248–295.

[5] Абызов А. Н. Кольца формальных матриц и их изоморфизмы / А.Н. Абызов, Д.Т. Тапкин // Сиб. мат. журнал. – 2015. – Т. 56. – С. 1199–1214.

[6] Тапкин Д. Т. Изоморфизмы колец инцидентности формальных матриц / Д. Т. Тапкин // Изв. вузов. Матем. – 2017. – № 12. – С. 84–91.

[7] Boboc C. Isomorphisms between Morita context rings / C. Boboc, S. Dăscălescu, L. van Wyk // Linear and Multilinear Algebra. – 2012. – V. 60, N. 5. – P. 545–563.

[8] Khazal R. Isomorphisms of generalized triangular matrix rings and recovery of tiles / R. Khazal, S. Dăscălescu, L. van Wyk // Internat. J. Math. – 2003. – V. 2003, N. 9. – P. 533–538.

Обобщенные матрицы

Пусть $n \geqslant 2$ и $R_1, R_2, \ldots, R_n$ — кольца, ${}_{R_i}{M_{ij}}_{R_j}$ — R_i-R_j-бимодули, причем $M_{ii} = R_i,\ i, j = 1, \ldots, n$.

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} r_1 & m_{12} & \ldots & m_{1n} \\ m_{21} & r_2 & \ldots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \ldots & r_n \end{pmatrix} \middle| \, m_{ij} \in M_{ij}, i, j = 1, \ldots, n \right\}.$$ [9][10]

$$\varphi_{ijk} : M_{ij} \otimes_{R_j} M_{jk} \longrightarrow M_{ik},\ \forall i, j, k = 1, \ldots, n.$$

Причем $\varphi_{iik} : R_i \otimes_{R_i} M_{ik} \longrightarrow M_{ik},\quad \varphi_{ijj} : M_{ij} \otimes_{R_j} R_j \longrightarrow M_{ij}$.
Положим $\varphi_{ijk}(a \otimes b) = ab$, $a \in M_{ij}$ и $b \in M_{jk}$.
Также как для колец обобщенных матриц порядка 2 требуем выполнения равенств ассоциативности $(ab)c = a(bc)$ для всех $a \in M_{ij}$, $b \in M_{jk}$ и $c \in M_{kl}$.

[9] Крылов П. А. Модули над кольцами формальных матриц / П. А. Крылов, А. А. Туганбаев // Фундамент. и прикл. матем. – 2009. – Т. 15, № 8. – С. 145–211.
[10] Крылов П. А. Формальные матрицы и их определители / П. А. Крылов, А. А. Туганбаев // Фундамент. и прикл. матем. – 2014. – Т. 19, № 1. – С. 65–119.

Обобщенные матрицы

Предложение

Кольцо K является кольцом формальных матриц порядка $n \geqslant 2$ тогда и только тогда, когда в K существует полная ортогональная система из n ненулевых идемпотентов.

Действительно, матричные единицы $E_{11}, E_{22}, \ldots, Enn$ в K образуют нужную систему идемпотентов.

Если T — некоторое кольцо и $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — полная ортогональная система ненулевых идемпотентов в T, то T изоморфно кольцу формальных матриц

$$\begin{pmatrix} e_1Te_1 & e_1Te_2 & \ldots & e_1Te_n \\ e_2Te_1 & e_2Te_2 & \ldots & e_2Te_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_nTe_1 & e_nTe_2 & \ldots & e_nTe_n \end{pmatrix}.$$

Предложение

Класс КОМ порядка n совпадает с классом колец эндоморфизмов модулей, разложимых в прямую сумму n ненулевых слагаемых.

Обобщенные матрицы

Пусть K — кольцо формальных матриц порядка $n \geqslant 2$:

$$K = \begin{pmatrix} R_1 & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & R_2 & \dots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & R_n \end{pmatrix}.$$

Обозначим $R = R_1$, $M = (M_{12}, \dots, M_{1n})$, $N = (M_{21}, \dots, M_{n1})^T$ и

$$S = \begin{pmatrix} R_2 & M_{23} & \dots & M_{2n} \\ M_{32} & R_3 & \dots & M_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n2} & M_{n3} & \dots & R_n \end{pmatrix},$$

где R — кольцо, S — кольцо формальных матриц порядка $n-1$, M — R-S-бимодуль и N — S-R-бимодуль, причем модульные умножения задаются как произведения строк и столбцов на матрицы.

Обобщенные матрицы

Бимодульные гомоморфизмы φ_{ijk} задают гомоморфизмы $\varphi : M \otimes_S N \longrightarrow R$ и $\psi : N \otimes_R M \longrightarrow S$. Между тем, нужные законы ассоциативности остаются в силе. И, таким образом, имеем кольцо формальных матриц $\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ и изоморфизм $K \cong \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$.

Замечание

В итоге можем заключить, что формальные матрицы, как и обычные, можно представлять в блочном виде. Действия над блочными матрицами проводим так же, как если бы вместо блоков были отдельные элементы. Умножение блочных матриц всегда выполнимо, когда сомножители имеют одинаковые разбиения.

Обобщенные матрицы над данным кольцом

K — КОМ порядка $n \geqslant 2$, в котором $R_1 = R_2 = \cdots = R_n = R$ и ${}_{R_i}M_{ij}{}_{R_j} = {}_RR_R$, $\forall i, j = 1, \ldots, n$. Бимодульные гомоморфизмы действуют следующим образом:

$$\varphi_{ijk} : {}_RR_R \otimes_R {}_RR_R \to R, \quad xy = \varphi_{ijk}(x \otimes y) = s_{ijk}xy, \ \ x, y \in R,$$

где $s_{ijk} \in C(R)$, $\forall i, j, k = 1, \ldots, n$. Причем эти центральные элементы должны удовлетворять тождествам

$$s_{iij} = 1 = s_{ijj} \ \text{ и } \ s_{ijk} \cdot s_{ikl} = s_{ijl} \cdot s_{jkl}, \ \forall i, j, k, l = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

называемым ***основными***.
Обозначаем такие кольца $M(n, R, \Sigma)$ или $M(n, R, \{s_{ijk}\})$, множество $\Sigma = \{s_{ijk} \in C(R) \mid i, j, k = 1, \ldots, n\}$ называем системой множителей кольца $M(n, R, \Sigma)$, а его элементы — множителями.
Впервые такие кольца появились в работе П.А. Крылова «Об изоморфизме колец обобщенных матриц» [11].

[11] Крылов П. А. Об изоморфизме колец обобщенных матриц / П.А. Крылов // Алгебра и логика. – 2008. – Т. 47, № 4. – С.456–463.

Обобщенные матрицы над данным кольцом

Замечание (1.3.1.)

Нетрудно убедиться, что $M(n, R, \Sigma)$ также образует алгебру относительно кольца R.

Замечание (1.3.2.)

Если $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M(n, R, \{s_{ijk}\})$, то

$$A \circ B = C = (c_{ij}) \quad и \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} s_{ikj} a_{ik} b_{kj}. \tag{3}$$

Из основных тождеств, поочередно полагая $i = k$ и $j = l$, можно вывести равенства:

$$s_{iji} = s_{jij} = s_{ijl} \cdot s_{jil} = s_{lij} \cdot s_{lji}. \tag{4}$$

Из равенств 4 получаются следующие тождества, вытекающие друг из друга перестановкой индексов:

Обобщенные матрицы над данным кольцом

$$
\begin{aligned}
s_{iji} = s_{jij} = s_{ijk} \cdot s_{jik} = s_{kij} \cdot s_{kji}\,, \\
s_{jkj} = s_{kjk} = s_{jki} \cdot s_{kji} = s_{ijk} \cdot s_{ikj}\,, \\
s_{iki} = s_{kik} = s_{ikj} \cdot s_{kij} = s_{jik} \cdot s_{jki}\,.
\end{aligned} \tag{5}
$$

С кольцом $M(n, R, \Sigma)$ всегда можно связать так называемые *матрицы множителей* S_k и S.

$$
S_k = (s_{ikj}) = \begin{pmatrix} s_{1k1} & s_{1k2} & \dots & s_{1kn} \\ s_{2k1} & s_{2k2} & \dots & s_{2kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{nk1} & s_{nk2} & \dots & s_{nkn} \end{pmatrix}, \quad S = (s_{iji}) = \begin{pmatrix} s_{111} & s_{121} & \dots & s_{1n1} \\ s_{212} & s_{222} & \dots & s_{2n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1n} & s_{n2n} & \dots & s_{nnn} \end{pmatrix},
$$

$k = 1, \dots, n$.
Далее R — коммутативное кольцо.
Зафиксируем число $l \in \{1, ..., n\}$ и положим $t_{ij} = s_{ijl}$ для всех $i, j \in \{1, ..., n\}$.
Рассмотрим отображение

$$
\eta_l : M(n, R, \Sigma) \to M(n, R), \quad (a_{ij}) \mapsto (t_{ij} \cdot a_{ij}). \tag{6}
$$

Обобщенные матрицы над данным кольцом

Определение (1.3.3.)

Пусть $A \in M(n, R, \Sigma)$, *обозначим* $d(A) = |\eta_l(A)|$. *Элемент* $d(A) \in R$ *называем* ***определителем обобщенной матрицы*** A, *а отображение* $d : M(n, R, \Sigma) \to R$, $A \mapsto d(A)$ — ***определителем кольца*** $M(n, R, \Sigma)$.

Следствие (1.3.3.)

Значение $d(A) = |\eta_l(A)|$ *не зависит от выбора номера* $l \in \{1, ..., n\}$. *Другими словами,* $|\eta_1(A)| = |\eta_2(A)| = \cdots = |\eta_n(A)| = d(A)$.

Теорема (1.3.1 Крылов-Туганбаев.)

Пусть $A \in M(n, R, \Sigma)$. *Матрица* A *обратима тогда и только тогда, когда её определитель* $d(A)$ — *обратимый элемент в кольце* R.

Предложение (1.3.3.)

(1) $d(E) = 1$;

(2) *определитель* d *является полилинейной функцией строк матрицы;*

(3) *если матрица* A' *получена из матрицы* A *перестановкой* i*-й и* j*-й строк, то* $d(A') = -s_{iji} \cdot d(A)$;

(4) *если в* A *есть пропорциональные строки, то* $d(A) = 0$;

(5) $d(A \circ B) = d(A) \cdot d(B)$ *для любых матриц* $A, B \in M(n, R, \Sigma)$;

(6) *если* $s_{ijk} = s_{kji}$ *для всех* i, j, k, *то* $d(A) = d(A^T)$ *для любой обобщенной матрицы* A. *Обратное верно только если все множители* s_{iji} — *неделители нуля в* R;

(7) *если матрицу* A *можно представить в блочном виде* $A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$, *то* $d(A) = d(B) \cdot d(C)$.

Определение (2.1.1.)

Пусть k — натуральное число, $k \geqslant 2$, R — произвольное кольцо с 1. Элемент $a \in R$ называется k-хорошим, если его можно записать в виде суммы k обратимых элементов кольца R, ир есть $\exists u_1, \ldots, u_k \in U(R)$, что $a = u_1 + \cdots + u_k$. Кольцо называется k-хорошим, если каждый его элемент является k-хорошим. [a] [b] [c] [d] [e] [f]

[a] Zelinsky D. Every linear transformation is a sum of non-singular ones // Proc. Amer. Math. Soc. – 1954. – V. 5. – P. 627—630.

[b] Wolfson K. G. An ideal theoretic characterization of the ring of all linear transformations // Amer. J. Math. – 1953. – V. 75. – P. 358–386.

[c] Skornyakov L. Complemented modular lattices and regular rings. — London: Oliver&Boyd, 1958. – 182 p.

[d] Fuchs L. Recent results and problems on Abelian groups // Topics in Abelian groups: Proc. Sympos., New Mexico State University. – Chicago: Scott, Foresman. – 1962. – P. 9—40.

[e] Henriksen M. Two classes of rings generated by their units / M. Henriksen // J. Algebra. – 1974. – V. 31. – P. 182–193.

[f] Vamos P. 2-good rings / P. Vamos // Quart. J. Math. – 2005. – V. 56. – P. 417–430.

Аддитивные вопросы

Определение

Пусть R — произвольное кольцо с 1. Элемент $a \in R$ называется чистым, если он представим в виде суммы идемпотентного элемента и обратимого. Кольцо R называется чистым, если все его элементы чистые. [a]

[a] Nicholson W. K. Lifting idempotents and exchange rings // Trans. Amer. Math. Soc. 1977. Vol. 229. P. 269 – 278

Определение

Пусть R — произвольное кольцо с 1. Элемент $a \in R$ называется ниль-чистым, если он представим в виде суммы идемпотентного элемента и нильпотентного. Кольцо R называется ниль-чистым, если все его элементы ниль-чистые. [a]

[a] Diesl A. J. Nil clean rings // J. Algebra. 2013. Vol. 383. P. 197 – 211

Аддитивные вопросы

Определение

Пусть R — произвольное кольцо с 1. Элемент $a \in R$ называется ниль-хорошим, если он представим в виде суммы нильпотентного элемента и обратимого или, что важно, нулевого. Кольцо называется ниль-хорошим, если все его элементы ниль-хорошие. [a]

[a] Danchev P. Nil-good unital rings // International Journal of Algebra. 2016. Vol. 10. P. 239 – 252

Определение

Пусть R — произвольное кольцо с 1. Элемент $a \in R$ называется 2-ниль-хорошим, если он представим в виде суммы нильпотентного элемента и двух обратимых или нулевого. Кольцо называется 2-ниль-хорошим, если все его элементы 2-ниль-хорошие. [a]

[a] Abdolyusefi M. S. On 2-nil-good rings / M. S. Abdolyusefi, N. *Ashrafi*, H. Chen // J. Algebra Appl. 2018. Vol. 17

Хорошие обобщенные матрицы

Теорема (2.2.1.)

Любая матрица из кольца обобщенных матриц K может быть записана как сумма диагональной и обратимой матриц.

Доказательство этой теоремы получается с помощью следующей леммы.

Лемма (2.2.2.)

Пусть U' — обобщенная матрица порядка n, которую можно записать в виде блочной матрицы 2-го порядка: $U' = \begin{pmatrix} U & B \\ C & 1 + CU^{-1}B \end{pmatrix}$, где U — обратимая обобщенная матрица порядка $n-1$, B — вектор-столбец длины $n-1$, C — вектор-строка длины $n-1$. Тогда U' — обратимая матрица и

$$(U')^{-1} = \begin{pmatrix} U^{-1} + (-U)^{-1}B(-C)U^{-1} & (-U)^{-1}B \\ -CU^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Хорошие обобщенные матрицы

Следствие

Пусть K — кольцо обобщенных матриц. Если все R_i — ниль-хорошие, $i = 1, \ldots, n$, то K — 2-ниль-хорошее.

Предложение (Abdolyusefi, Ashrafi, Chen[a])

[a] Abdolyusefi M. S. On 2-nil-good rings / M. S. Abdolyusefi, N. *Ashrafi*, H. Chen // J. Algebra Appl. 2018. Vol. 17

Пусть $K = (R, {}_RM_S, {}_SN_R, S, \varphi, \psi)$ — кольцо контекста Мориты. Если R, S — 2-ниль-хорошие кольца, то K — 2-ниль-хорошее.

Теорема (2.1.1.)

Кольцо обобщенных матриц K будет k–хорошим, если все R_i — k-хорошие кольца для некоторого $k > 1$, $i = 1, \ldots, n$.

Хорошие обобщенные матрицы

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, R, s)$. Напомним, $\eta_l : (a_{ij}) \mapsto (t_{ij} \cdot a_{ij})$.

$$\eta_1 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & s \cdot b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \eta_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ s \cdot c & d \end{pmatrix}.$$

$$d(A) = |\eta_1(A)| = |\eta_2(A)|, \ d(A) = a \cdot d - s \cdot c \cdot b.$$

Предложение (2.3.1.)

Пусть $M(2, \mathbb{Z}, s)$ — кольцо обобщенных целочисленных матриц порядка 2 и пусть множитель s — четное число. Если диагональная матрица $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ является 2-хорошей в $M(2, \mathbb{Z}, s)$, то тогда её элементы a и b — четные числа.

Теорема (2.3.1.)

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{Z}, s)$. A будет 2-хорошей тогда и только тогда, когда $a \in \{0; 1; -1; 2; -2\}$ при нечетном множителе s, и $a \in \{0; 2; -2\}$ при четном.

Один класс 3-хороших КОМ [12] [13]

На оставшихся слайдах R — коммутативное кольцо.

Пусть $\Sigma = \{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$ — некоторая система множителей, τ — подстановка степени n. Положим $t_{ijk} = s_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)}$. Тогда $\{t_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$ — тоже система множителей какого-то КОМ $M(n, R, \tau\Sigma)$.

Кольца $M(n, R, \Sigma)$ и $M(n, R, \tau\Sigma)$ изоморфны при соответствии $A \to \tau A = (a_{\tau(i)\tau(j)})$.

Далее рассматриваем $M(n, R, \{0, 1\})$.

Лемма (1.3.1.)

Для элементов s_{iji}, s_{jkj} и s_{kik} имеет место только одна из следующих трех возможностей:

(1) *все три элемента равны 1;*

(2) *какие-то два из этих трех элементов равны 0, а третий элемент — 1;*

(3) *все три элемента равны 0.*

[12] Крылов П. А., Норбосамбуев Ц. Д. Автоморфизмы алгебр формальных матриц // Сиб. матем. журн. – 2018. – Т. 59, № 5. – С. 885–893

[13] Норбосамбуев Ц. Д., Тимошенко Е. А. Об одном классе 3-хороших колец формальных матриц // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. [готовится к печати – 2020 г.]

Один класс 3-хороших КОМ

τ — подстановка такая, что $\tau S = \begin{pmatrix} \boxed{1}_1 & \boxed{0} & \dots & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{1}_2 & \dots & \boxed{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \dots & \boxed{1}_m \end{pmatrix}$.

$\forall A \in K$ выделим на гл. диагонали блоки $A_1, \dots, A_m$. Тогда блоки A_l для фиксированного l всех матриц из K образуют $K_l = M(k_l, R)$. $L = K_1 \oplus \dots \oplus K_m$. Через I обозначим множество всех матриц $A \in K$, для которых блоки $A_1, \dots, A_m$ состоят из нулей.

Предложение (3.2.1)

I — идеал кольца K.

Предложение (3.2.1)

$I^m = 0$. То есть, I — нильпотентный идеал кольца K.

Один класс 3-хороших КОМ

$K = L \oplus I$, то есть, *K есть расщепляющееся расширение своего нильпотентного идеала I с помощью кольца L.*

Теорема

Пусть $A \in K$ и $A = C + D$, где $C \in L$ и $D \in I$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) *Матрица A обратима в кольце K;*
2) *Матрица C обратима в кольце L.*

В прямой сумме $L = K_1 \oplus \ldots \oplus K_m$ каждое K_l — это обычное кольцо матриц, $K_l = M(k_l, R)$.. С учетом результатов М. Хенриксена получаем следующее утверждение:

Теорема

Пусть у всех колец-блоков K_l из разложения $L = K_1 \oplus \ldots \oplus K_m$ порядки k_l строго больше единицы. Тогда $K = L \oplus I$ — 3-хорошее кольцо.

Один класс 3-хороших КОМ

Если $K = M(n, R, \Sigma)$ и множество $\{1, 2, \dots, n\}$ представляет собой единственный класс эквивалентности, то K совпадает с обычным матричным кольцом $M(n, R)$ и ввиду теоремы Хенриксена является 3-хорошим для каждого $n \geqslant 2$. Наименьшее n, для которого возможно нетривиальное разбиение множества $\{1, 2, \dots, n\}$ на классы эквивалентности, каждый из которых содержит хотя бы два индекса, очевидно, равно 4. Если $K = M(4, R, \Sigma)$ или $K = M(5, R, \Sigma)$, а матрица множителей S кольца K может быть представлена в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ или } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

то по предыдущей теореме кольцо K является 3-хорошим.

Ранг обобщенной матрицы

Определение (4.1.1.)

Пусть $A \in M(n \times m, R)$. *Для всякого* $t = 1 \ldots, r = min\{m, n\}$, *через* $I_t(A)$ *будем обозначать идеал в* R, *порождаемый всеми* $(t \times t)$*-минорами матрицы* A.

Определение (4.1.2.)

Аннулятором непустого множества S *в кольце* R *называется множество* $Ann_R(S) = \{r \in R \mid s \cdot r = 0, \forall s \in S\}$.

Пусть $A \in K$. Зафиксируем число $l \in \{1, \ldots, n\}$. Существует гомоморфизм колец $\eta_l : K \to M(n, R)$, $(a_{ij}) \mapsto (t_{ij} \cdot a_{ij})$, где $t_{ij} = s_{ijl} \in \Sigma$.

Определение (4.1.4.)

Назовем Σ*-рангом,* l*-рангом или просто рангом* $r_l(A)$ *матрицы* $A \in M(n, R, \Sigma)$ *обобщенный ранг матрицы* $\eta_l(A) \in M(n, R)$ *по Маккою* [a]. *То есть,* $r_l(A) = rk(\eta_l(A)) = max\{t \in \mathbb{Z} | Ann_R(I_t(\eta_l(A))) = 0\}$.

[a] McCoy N. Rings and Ideals / N. McCoy. – Carus Math. Monogr. 8, Mathematical Association of America, 1948. – 216 p.

Ранг обобщенной матрицы

Если $A \in M(m \times n, R)$ и $m < n$, то дописав к A снизу $n - m$ нулевых строк, придем к квадратной матрице $\left(\frac{A}{0}\right)$, которую можем считать обобщенной. Аналогично, если $A \in M(m \times n, R)$ и $m > n$, то $(A \mid 0)$ — матрицу A с приписанными справа $m - n$ нулевыми столбцами также считаем обобщенной.

Лемма (4.1.1.)

Пусть $A \in M(m \times n, R)$, $K = M(max\{m, n\}, R, \Sigma)$ — кольцо обобщенных матриц. Имеют место следующие соотношения и импликации для любого фиксированного $l \in \{1, \ldots, n\}$:

1) $0 \leqslant r_l(A) \leqslant min\{m, n\}$;
2) $r_l(A) = r_l(PAQ), \forall P, Q \in U(M(max\{m, n\}, R, \Sigma))$;
3) $r_l(A) = 0 \Leftrightarrow Ann_R(I_1(\eta_l(A))) \neq 0$;
4) *Если $m = n$, то $r_l(A) < n \Leftrightarrow d(A) \in Z(R)$, где $d(A)$ — определитель обобщенной матрицы A, $Z(R)$ — множество делителей нуля кольца R.*

Определение (4.2.1.)

Пусть $A \in M(n, R, \Sigma)$. Зафиксируем номер $l \in \{1, 2, \dots, n\}$. Под ***формальной системой линейных уравнений*** *(сокращенно —* ***ФСЛУ****) понимаем матричное уравнение:*

$$A \circ X_l = B_l,$$

где X_l — обобщенная матрица порядка n с элементами $x_1, x_2, \dots, x_n$ в l-ом столбце и нулями на всех остальных местах, B_l — аналогичная матрица, но с элементами $b_1, b_2, \dots, b_n$.

В полном виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & \dots & x_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & x_n & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & b_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & b_n & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В зависимости от выбора $l \in \{1, \dots, n\}$ можем получить n различных ФСЛУ не обязательно эквивалентных между собой.

Формальные системы уравнений

$\mathrm{Col}_i(A)$ — i-й столбец матрицы A.

Предложение (4.2.1.)

Система формальных линейных уравнений $A \circ X_l = B_l$ эквивалентна обычной системе линейных уравнений $\eta_l(A) \cdot X = B$ над кольцом R, где $X = \mathrm{Col}_l(X_l)$ и $B = \mathrm{Col}_l(B_l)$ — вектор-столбец неизвестных и вектор-столбец $(b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ длины n соответственно, а η_l — кольцевой гомоморфизм, определенный выше — $\eta_l : M(n, R, \Sigma) \to M(n, R), \quad (a_{ij}) \mapsto (t_{ij} \cdot a_{ij})$.

Теорема (4.2.1.)

Пусть $A \in M(m \times n, R)$. Однородная СФЛУ $A \circ X_l = 0$ имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $r_l(A) < min\{m, n\}$.

Теорема (4.2.3.)

Пусть $A \in M(m \times n, R)$. Допустим, что ФСЛУ $A \circ X_l = B_l$ имеет решение. Тогда $I_t(\eta_l(A)) = I_t(\eta_l(A) \mid \mathrm{Col}_l(B_l))$ при любом $t = 1, \dots, n$, где $(\eta_l(A) \mid \mathrm{Col}_l(B_l))$ — матрица $\eta_l(A)$ с приписанным справа l-ым столбцом матрицы B_l.

Формальные системы уравнений

В общем случае равенство $I_t(\eta_l(A)) = I_t(\eta_l(A) \mid \mathrm{Col}_l(B_l))$ не гарантирует совместность системы $A \circ X_l = B_l$. Следующий результат, аналогичный теореме Камиона-Леви-Манна [14] для систем линейных уравнений над кольцом R, дает достаточные условия для разрешимости СФЛУ $A \circ X_l = B_l$.
Через $I_m(\eta_l(A) \mid B)^*$ будем обозначать идеал в R, порождаемый всеми $(m \times m)$-минорами матрицы $(\eta_l(A) \mid \mathrm{Col}_l(B_l))$, которые включают элементы последнего столбца. Другими словами, $I_m(\eta_l(A) \mid B)^*$ порождается множеством

$$\{\Delta(i_1, \dots, i_m; j_1, \dots, j_{m-1}, n+1) \mid 1 \leqslant j_1 < \dots < j_{m-1} \leqslant n\}.$$

Теорема (4.2.4.)

Пусть $A \in M(m \times n, R)$, $m \leqslant n$ и $r_l(A) = m$. Допустим, что в R существуют идеал W и неделитель нуля $z \in R$ такие, что $WI_m(\eta_l(A) \mid B)^* \subseteq Rz \subseteq WI_m(\eta_l(A))$. Тогда СФЛУ $A \circ X_l = B_l$ имеет решение.

[14] Camion P. Linear equations over commutative ring / P. Camion, L.S. Levy, H.B. Mann // J. Algebra. – 1971. – Vol. 18. – P. 432–436.

Формальные системы уравнений

Теорема (4.2.2 (Правило Крамера).)

Пусть $A \in M(n, R, \Sigma)$ и $d(A) \in U(R)$, другими словами, пусть A — обратимая обобщенная матрица. Тогда для любой матрицы $B_l \in K$ с l-ым столбом $\mathrm{Col}_l(B_l) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T \in R^n$ и нулями на всех остальных местах уравнение $A \circ X_l = B_l$ имеет единственное решение — матрицу $C_l \in K$ с l-ым столбцом $\mathrm{Col}_l(C_l) = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$, где

$$c_j = (d(A))^{-1} \cdot det \begin{pmatrix} s_{11l}a_{11} & \ldots & s_{1,j-1,l}a_{1,j-1} & b_1 & s_{1,j+1,l}a_{1,j+1} & \ldots & s_{1nl}a_{1n} \\ s_{21l}a_{21} & \ldots & s_{2,j-1,l}a_{2,j-1} & b_2 & s_{2,j+1,l}a_{2,j+1} & \ldots & s_{2nl}a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1l}a_{n1} & \ldots & s_{n,j-1,l}a_{n,j-1} & b_n & s_{n,j+1,l}a_{n,j+1} & \ldots & s_{nnl}a_{nn} \end{pmatrix},$$

$\forall j = 1, \ldots, n$, и нулями на всех остальных местах.

Делители нуля в $M(n, R, \Sigma)$

Теорема (4.3.1.)

Пусть $A \in K$. Эквивалентны следующие утверждения:

1) *A – левый делитель нуля в K;*
2) *A – правый делитель нуля в K;*
3) *$d(A) \in Z(R)$;*
4) *$r_l(A) < n$ для любого $l = 1, \ldots, n$.*

Таким образом, показано, что правые и левые делители нуля в кольцах формальных матриц со значениями в данном коммутативном кольце R совпадают и их определители как матриц являются делителями нуля в R.

Литература

- **Норбосамбуев Ц. Д.** О суммах диагональных и обратимых обобщенных матриц / Ц. Д. Норбосамбуев // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. – 2015. – Т. 36, № 4. – С. 34–40.
- Крылов П. А. Автоморфизмы алгебр формальных матриц / П. А. Крылов, **Ц. Д. Норбосамбуев** // Сиб. матем. журн. – 2018. – Т. 59, № 5. – С. 885–893.
- Крылов П. А. Группа автоморфизмов одного класса алгебр формальных матриц / П. А. Крылов, **Ц. Д. Норбосамбуев** // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. – 2018. – Т. 53, № 3. – С. 16–21.
- **Норбосамбуев Ц. Д.** Ранг формальной матрицы. Система формальных линейных уравнений. Делители нуля / Ц. Д. Норбосамбуев // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. – 2018. – Т. 52, № 2. – С. 5–12.

Литература

- **Норбосамбуев Ц. Д.** 2-хорошие диагональные формальные матрицы над кольцом целых чисел / Ц. Д. Норбосамбуев // Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики»: Сборник статей. Томск, 25–29 апреля 2016 г. – Томск, Изд-во ТГУ. – 2016. – С. 6–12.
- **Норбосамбуев Ц. Д.** О суммах диагональных и обратимых обобщенных матриц / Ц. Д. Норбосамбуев // "Научная конференция студентов механико-математического факультета ТГУ": Сборник конференции. Томск, 24–30 апреля 2014 г. – Томск, РИО Том. ун-та: Издательство "Томский ЦНТИ". – 2014. – С. 12–13.
- **Норбосамбуев Ц. Д.** 2-хорошие формальные матрицы над кольцом целых чисел / Ц. Д. Норбосамбуев //Алгебра и логика: теория и приложения: тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 70-летию В.М. Левчука: Сборник конференции. Красноярск, 24–29 июля 2016 г. – Красноярск: СФУ. – 2016. – С. 50–51.

Литература

- **Норбосамбуев Ц. Д.** 3-хорошие формальные матрицы над кольцом целых чисел / Ц. Д. Норбосамбуев // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНО-СОВ-2015» / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. [Электронный ресурс] – М.: МАКС Пресс, 2015. – 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM); 12 см.
- **Норбосамбуев Ц. Д.** Ранг формальных матриц / Ц. Д. Норбосамбуев //Всероссийская молодежная научная конференция "Все грани математики и механики": Сборник тезисов докладов. Томск, 25–28 апреля 2017. – Томск. – 2017. – С. 10.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!