

О квантовом просеивании изотопов гелия

Бубенчиков Алексей Михайлович, д.ф.-м.н., профессор, ведущий научный сотрудник
регионального научно-образовательного математического центра ТГУ

Дифференциальное уравнение волновой динамики имеет вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \Psi + \frac{\hbar^2}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

Ψ – волновая функция,

\hbar – постоянная Планка,

U – энергия взаимодействия частицы с окружением,

m – масса частицы,

Δ – оператор Лапласа,

i – мнимая единица,

E – энергия частицы.

В частном случае, когда потенциальная энергия U явно не зависит от времени, решение уравнения (1) ищется в виде:

$$\Psi = \psi e^{-iEt/\hbar} \quad (2)$$

Тогда для нахождения амплитуды волны Ψ будем иметь **стационарное уравнение Шредингера**:

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0 \quad (3)$$

При анализе задач прохождения изотопов через составные мембраны удобнее будет иметь **безразмерную форму уравнения** переноса вещества:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + 2m(E - U(x))\psi = 0 \quad (4)$$

Массу частицы отнести к m_0 – массе атома водорода, за масштаб энергии взять U_0 – глубину потенциальной ямы в распределении энергии парных взаимодействий вещества мембраны и подвижных частиц, а в качестве масштаба длины принять величину $L = \hbar / \sqrt{m_0 U_0}$

Таким образом, мы уменьшили количество констант задачи на единицу. Это является существенным при проведении дальнейших аналитических выкладок.

Стационарное уравнение Шредингера

Прохождение и отражение волн материи от потенциального барьера $U(x)$ описывается стационарным дифференциальным уравнением для амплитуды волновой функции:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + [k^2 - 2mU(x)]\psi = 0. \quad (5)$$

где $k = \sqrt{2mE}$.

Падающая волна, набегающая на барьер с левой стороны, имеет вид:

$$\psi_0 = e^{ikx} \quad (6)$$

Известны точные решения уравнения (5) для потенциального барьера $U(x)$ прямоугольной формы, а также для барьера имеющего вид:

$$U(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(\alpha x)}. \quad (7)$$

Для потенциальных барьеров, имеющих другую форму, применяются приближенные численные методы решения уравнения (5).

Стационарное уравнение Шредингера

Сначала находится пара линейно независимых решений $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$, на промежутке $0 < x < L$, примыкающем к области барьера $U(x)$. Далее совершается так называемая '*сшивка*'.

Предполагается, что решения уравнения (5) на разных участках имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= e^{ikx} + D \cdot e^{-ikx} & x < 0 \\ \psi(x) &= A \cdot \Phi_1(x) + B \cdot \Phi_2(x) & 0 < x < L \\ \psi(x) &= C \cdot e^{ik(x-L)} & x > L \end{aligned} \quad (8)$$

Задача *сшивки* решений состоит в определении четырех коэффициентов A, B, C, D , из условия равенства значений функции $\psi(x)$ и ее производной, в точках контакта со смежными областями. Это приводит к системе четырех линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1(0) & \Phi_2(0) & 0 & 1 \\ \Phi_1'(0) & \Phi_2'(0) & 0 & -ik \\ \Phi_1(L) & \Phi_2(L) & -1 & 0 \\ \Phi_1'(L) & \Phi_2'(L) & -ik & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ ik \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Стационарное уравнение Шредингера

В квантовой механике важна не столько функция $\psi(x)$, выражаемая формулами (8) и (9), сколько **квадрат ее модуля** $\rho=|\psi|^2$, т. к. он равен *плотности вероятности того, что частица находится в точке с координатой x .*

Более информативным параметром является текущий *коэффициент прохождения* $S=|C|^2$ или *коэффициент отражения* $R=|D|^2$.

Отметим, что система (9) обладает свойством, что всегда выполняется равенство

$$|C|^2 + |D|^2 = 1 \quad (10)$$

Стационарное уравнение Шредингера

На рисунке 1 показан результат расчета величин $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ для барьера с численно заданной формой (пунктирная линия).

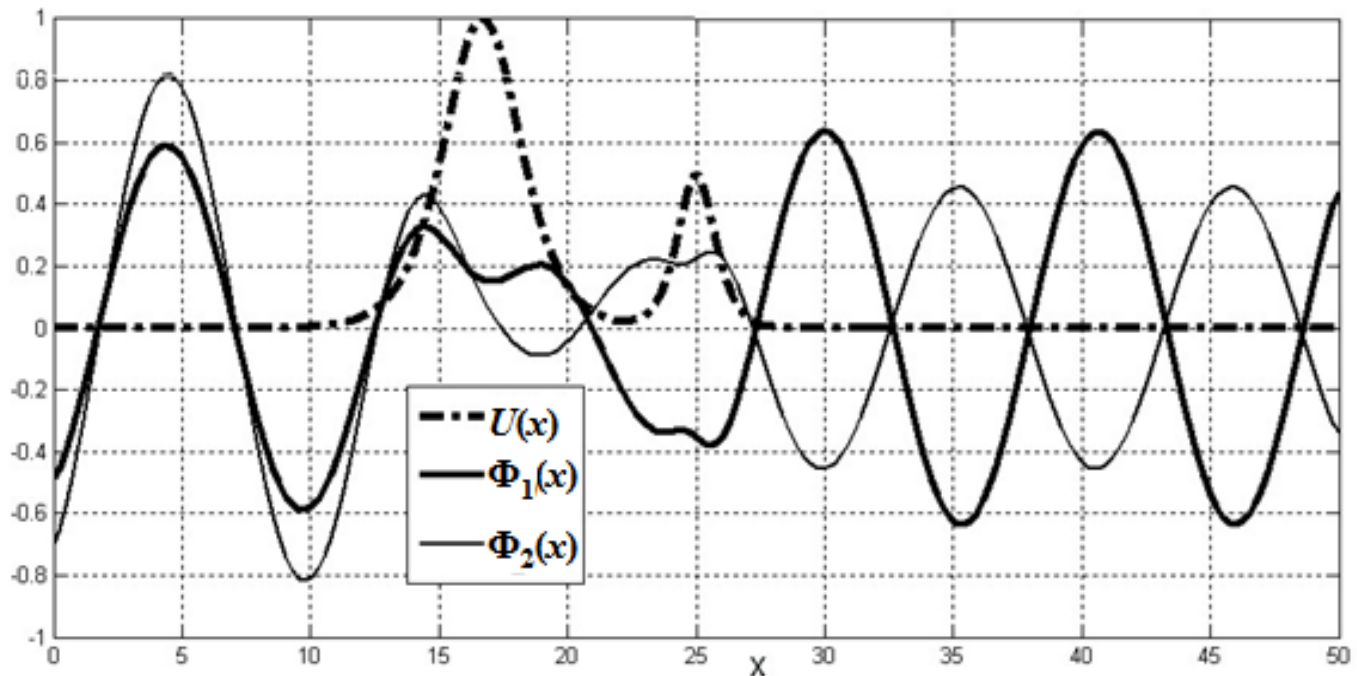


Рисунок 1

Стационарное уравнение Шредингера

На рисунке 2 показано как выглядит на фоне составного потенциального барьера $U(x)$, заданного в численном виде, графики функций $\rho(x)=|\psi|^2$ и текущего значения коэффициента прохождения $S(x)$.

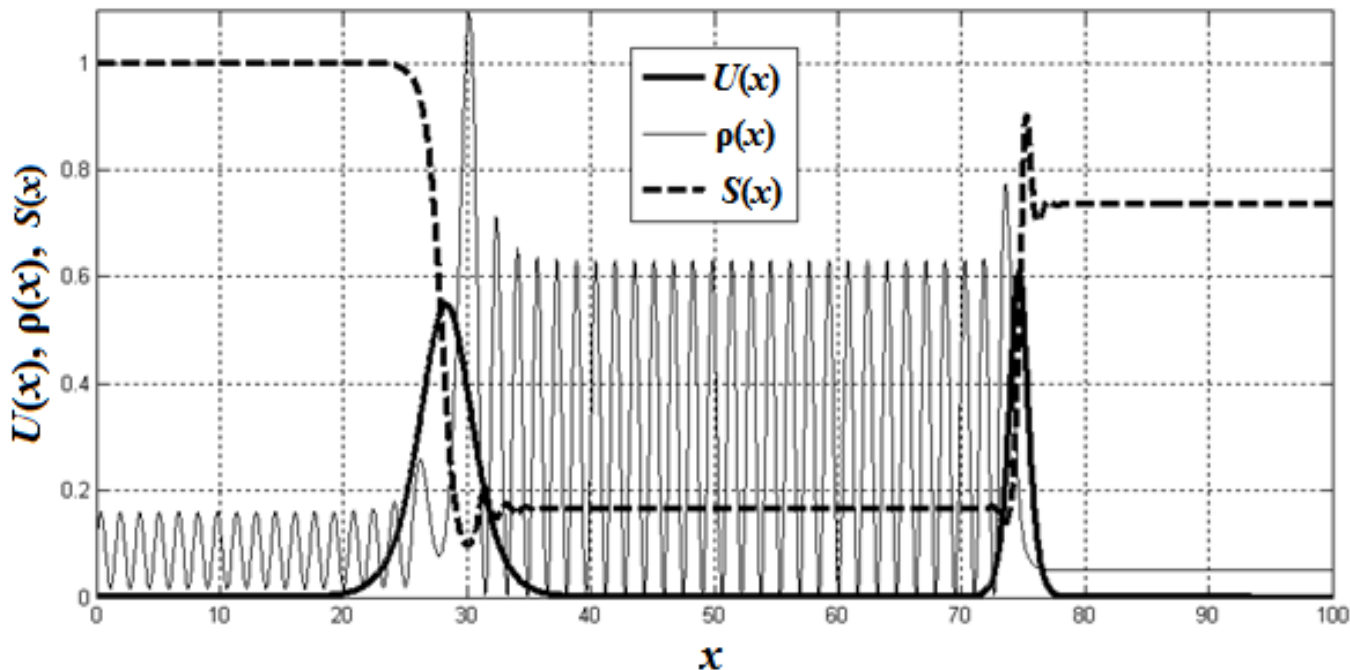


Рисунок 2

Для решения однородного уравнения Шредингера (5) можно эффективно использовать его матричную модель, основанную на *теории четырехполюсников*.

Если на участке $x_1 > x > x_2$ потенциальный барьер $U(x)$ имеет постоянную высоту, то уравнение (5) внутри этого участка будет иметь вид:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \omega^2 \psi = 0, \quad \omega^2 = k^2 - 2mU. \quad (11)$$

Оно имеет решение:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= a \cos \omega(x - x_1) + b \sin \omega(x - x_1), \\ \psi'(x) &= -a\omega \sin \omega(x - x_1) + b\omega \cos \omega(x - x_1). \end{aligned} \quad (12)$$

Полагая в этих равенствах $x=x_1$, найдем коэффициенты a, b : $a = \psi(x_1), b = \psi'(x_1)/\omega$.

После этого равенства (12) записываются как:

$$\begin{pmatrix} \psi(x - x_1) \\ \psi'(x - x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega(x - x_1) & \frac{\sin \omega(x - x_1)}{\omega} \\ -\omega \sin \omega(x - x_1) & \cos \omega(x - x_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(x_1) \\ \psi'(x_1) \end{pmatrix} \quad (13)$$

Таким образом, имеем формулу перехода для значений функции ψ и ее производной от одного участка разбиения по оси x к другому:

$$\begin{pmatrix} \psi_{n+1} \\ \psi'_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_n (x_{n+1} - x_n) & \frac{\sin \omega_n (x_{n+1} - x_n)}{\omega_n} \\ -\omega_n \sin \omega_n (x_{n+1} - x_n) & \cos \omega_n (x_{n+1} - x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi'_n \end{pmatrix} \quad (14)$$

Если интервал разбиения по оси x является равномерным, то в (14) с индексом n изменяется лишь *пространственная частота* $\omega_n = \sqrt{k^2 - 2mU_n}$

Рекуррентное соотношение (14) тогда записывается как:

$$\begin{pmatrix} \psi_{n+1} \\ \psi'_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{M}_n \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi'_n \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \mathbf{M}_n = \begin{pmatrix} \cos \omega_n h & \frac{\sin \omega_n h}{\omega_n} \\ -\omega_n \sin \omega_n h & \cos \omega_n h \end{pmatrix} \quad (15)$$

При использовании рекуррентных формул (15) происходит естественное согласование решений на внутренних концах интервалов разбиения. На остальной бесконечной области условие сшивки содержит только два неизвестных коэффициента: C и D , и записывается в виде

$$\begin{pmatrix} 1 + D \\ ik(1 - D) \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} C \\ ikC \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_3 \cdot \dots \cdot \mathbf{M}_N \quad (16)$$

Коэффициенты C и D из уравнений (16) можно определить непосредственно, и для них получаются следующие соотношения:

$$Q = \frac{\mathbf{M}_{21} + ik\mathbf{M}_{22}}{\mathbf{M}_{12}k^2 - ik\mathbf{M}_{11}}, \quad D = \frac{1 + Q}{1 - Q}, \quad C = \mathbf{M}_{22}(D + 1) + \mathbf{M}_{12}(D - 1) \quad (17)$$

В методе четырехполюсников можно использовать большое число точек интервала разбиения ($N > 1000$).

Применение метода четырехполюсников

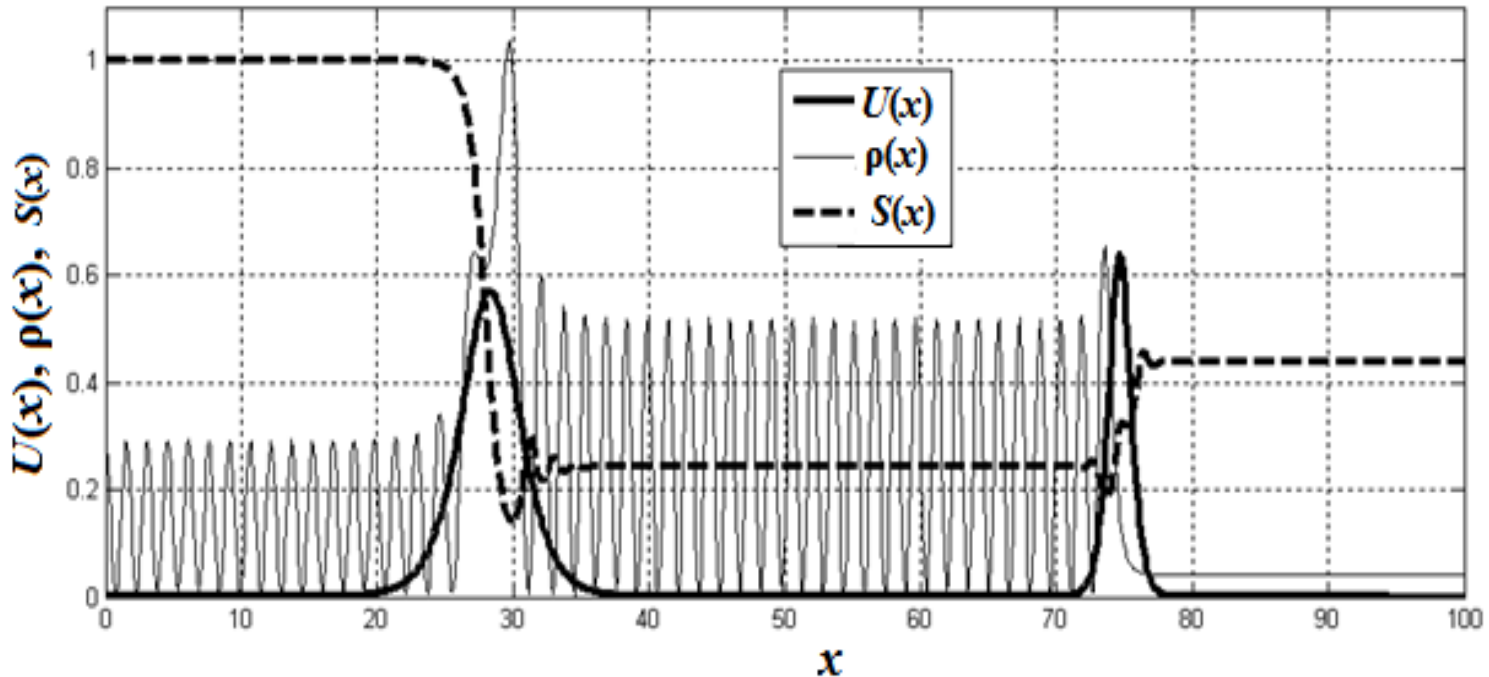


Рисунок 3 – Графики функций $S(x)$ и $\rho(x)=|\psi|^2$, вычисленные с применением программы, использующей метод четырехполюсников

При проведении численных экспериментов давно уже замечено, что полный коэффициент прохождения $S(E)$ двойного барьера имеет ‘аномальное’ поведение по отношению к энергии частицы.

Для прояснения вопроса об аномальной зависимости $S(E)$ был построен график, который показан на рисунке 4. Такой расчет предполагает многократное вычисление при различных значениях энергии E .

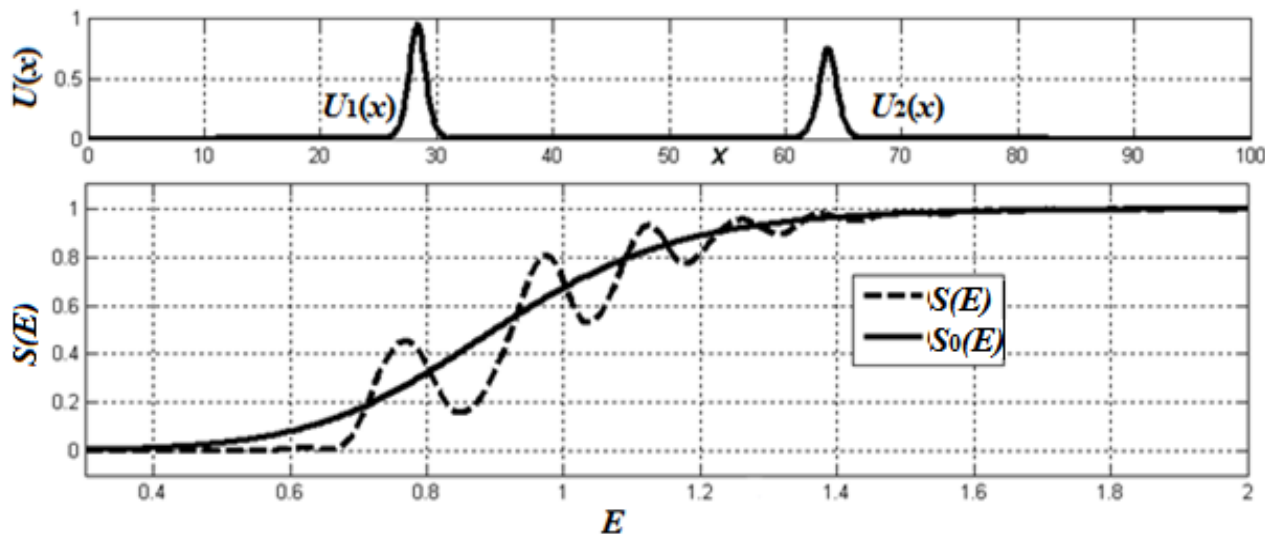


Рисунок 4 – Графики функций $S(E)$ при постоянном значении $m=3$

Интегральное уравнение Шредингера и его преобразования

Обычно под условиями *сшивки* понимаются равенства самой волновой функции и ее производной. Однако отсутствуют какие-либо обоснования в отношении использования этой формы условий. Также требует обоснования и сам размер конечной области интегрирования.

В связи с этим важными являются попытки проведения интегрирования по всей действительной оси, что возможно сделать *аналитическим методом*. Вполне подходящим для этого является **интегральное уравнение Шредингера**:

$$\psi(x) - \frac{2m}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x-\zeta|} U(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta = e^{ikx} \quad (18)$$

По своему виду уравнение (18) аналогично интегральному уравнению с вырожденным ядром. Для его дальнейших преобразований воспользуемся оператором сдвига:

$$e^{-h \frac{d}{dx}} f(x) = f(x - h) \quad (19)$$

Применяя равенство (19) к (18), исходное уравнение можем переписать в виде:

$$\psi(x) - \lambda \left(\int_{-\infty}^{\infty} U(\zeta) \psi(\zeta) e^{-\zeta \frac{d}{dx}} d\zeta \right) \cdot e^{ik|x|} = e^{ikx}, \quad \lambda = \frac{m}{ik} = \frac{1}{2i} \cdot \sqrt{\frac{2m}{E}} \quad (20)$$

Выражение в скобках можно рассматривать как нелинейный дифференциальный оператор или аналитическую функцию параметра $p=d/dx$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(\zeta) \psi(\zeta) e^{-\zeta \frac{d}{dx}} d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} U(\zeta) \psi(\zeta) e^{-\zeta p} d\zeta = L(p), \quad p = \frac{d}{dx} \quad (21)$$

С учетом введенного обозначения уравнение (21) можно переписать в следующем виде:

$$\psi(x) - \lambda \cdot L(p) \cdot e^{-ik|x|} = e^{ikx} \quad (22)$$

Умножая (22) на $U(x)e^{-xp}$ и интегрируя в бесконечных пределах найдем

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} U(x) \psi(x) e^{-xp} dx \right) - \lambda L(p) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x|} U(x) e^{-xp} dx \right) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} U(x) e^{-xp} dx \right) \quad (23)$$

Здесь появляются еще два дифференциальных оператора, для которых введем следующие обозначения:

$$B(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} U(x) e^{-xp} dx, \quad Q(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x|} U(x) e^{-xp} dx \quad (24)$$

С учетом этих обозначений операторное равенство (23) примет вид:

$$L(p) \cdot [1 - \lambda Q(p)] = B(p) \quad (25)$$

Отсюда получаем

$$L(p) = \frac{B(p)}{1 - \lambda Q(p)} \quad (26)$$

Интегральное уравнение Шредингера и его преобразования

Подставляя (26) в выражение (22), получаем решение интегрального уравнения в виде:

$$\psi(x) = e^{ikx} + \frac{\lambda B(p)}{1 - \lambda Q(p)} \cdot e^{ik|x|}, \quad p = \frac{d}{dx}, \quad k = \sqrt{2mE}, \quad \lambda = \frac{m}{ik} \quad (27)$$

Если бы дифференциальный оператор $L(p)$ действовал показательную функцию обычного вида, то результат был бы следующим:

$$L\left(\frac{d}{dx}\right) \cdot e^{\mu x} = L(\mu) \cdot e^{\mu x} \quad (28)$$

Экспоненту от модуля аргумента в (27) можно привести к обычной экспоненте, если воспользоваться тождеством Фурье:

$$e^{ik|x|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} e^{i\omega\alpha} e^{ik|\alpha|} d\alpha d\omega \quad (29)$$

Применяя правила (28) и (29) к формуле (27), получим **решение интегрального уравнения Шредингера:**

$$\psi(x) = e^{ikx} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} L(-i\omega) e^{-i\omega x} e^{ik|\alpha|} e^{i\omega\alpha} d\alpha d\omega \quad (30)$$

На этом этапе интегрирования мы уже освободились от дифференциального оператора $L(p)$, заменив его с использованием правила (28) функцией $L(\omega)$. Функцию $L(-i\omega)$ обозначим через $G(\omega)$. Тогда с учетом (26) получим:

$$G(\omega) = \frac{\lambda B(-i\omega)}{1 - \lambda Q(-i\omega)} = \frac{\lambda \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{ix(\omega+k)} dx}{1 - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{ik|x|} e^{i\omega x} dx} \quad (31)$$

В результате будем иметь

$$\psi(x) = e^{ikx} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} G(\omega) e^{ik|\alpha|} e^{i\omega\alpha} d\alpha d\omega \quad (32)$$

Предположим также, что функция $G(\omega)$ является спектром некоторой функции $K(x)$. Это означает, что выполняются следующие условия:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) \cdot e^{i\omega x} dx, \quad K(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \quad (33)$$

Поставляя (33) в (32) найдем:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= e^{ikx} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \int_{-\infty}^{\infty} K(\beta) \cdot e^{i\omega\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|\alpha|} e^{i\omega\alpha} d\alpha d\beta d\omega = \\ &= e^{ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} K(\beta) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|\alpha|} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(-x+\beta+\alpha)} d\omega \right) d\alpha d\beta. \end{aligned} \quad (34)$$

Интеграл, стоящий в скобках последнего выражения, представляет собой дельта функцию Дирака. Поэтому далее можем записать:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= e^{ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} K(\beta) d\beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|\alpha|} \delta(\alpha - (x - \beta)) d\alpha = \\ &= e^{ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} K(\beta) \cdot e^{ik|x-\beta|} d\beta. \end{aligned} \quad (35)$$

Таким образом, наиболее компактная запись решения, в котором интеграл берется по направлению изменения физической переменной, выглядит следующим образом:

$$\psi(x) = e^{ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta) \cdot e^{ik|x-\zeta|} d\zeta \quad (36)$$

Необходимо проверить выполнение условий при $x=\pm\infty$. Для этого перепишем решение (36) в следующем виде:

$$\psi(x) = e^{ikx} \left[1 + \int_{-\infty}^x K(\zeta) e^{-ik\zeta} d\zeta \right] + e^{-ikx} \left[\int_x^{\infty} K(\zeta) e^{ik\zeta} d\zeta \right] \quad (37)$$

Опираясь на последнюю форму решения, можно сделать заключение об асимптотическом поведении волновой функции следующим образом:

$$\psi(x) \approx e^{ikx} \left[1 + \int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta) e^{-ik\zeta} d\zeta \right], \quad x \rightarrow \infty;$$

$$\psi(x) \approx e^{ikx} + e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta) e^{ik\zeta} d\zeta, \quad x \rightarrow -\infty. \quad (38)$$

Одиночный барьер в виде импульса Гаусса

Пусть барьер определяется *простейшей формулой*:

$$U(x) = e^{-x^2} \quad (39)$$

Вычислим графики спектральных функций:

$$B_1(\omega + k) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{ix(\omega+k)} dx, \quad B_2(\omega - k) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{ix(\omega-k)} dx, \quad (40)$$

$$Q(\omega) = B_3(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{ik|x|} e^{i\omega x} dx.$$

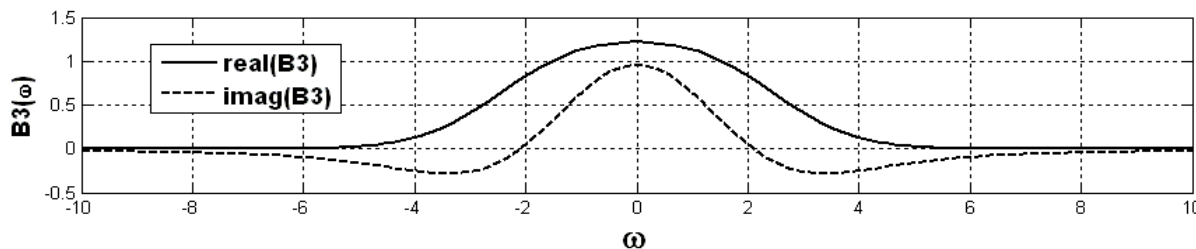
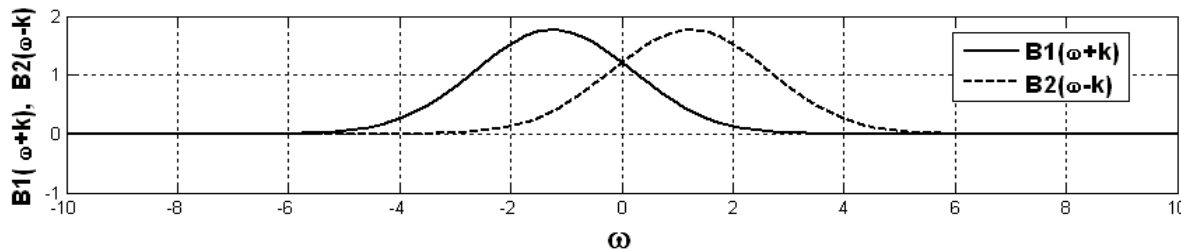


Рисунок 5 – Графики $B_1(\omega+k)$, $B_2(\omega-k)$ и $B_3(\omega)$

Одиночный барьер в виде импульса Гаусса

Все три функции достаточно быстро убывают с увеличением модуля ω . Последнее обстоятельство позволяет, после вычисления спектра $G(\omega)$, легко восстановить и функцию $K(x)$ по формуле (37). Графики функций $G(\omega)$ и $K(x)$ приведены на рисунке 6.

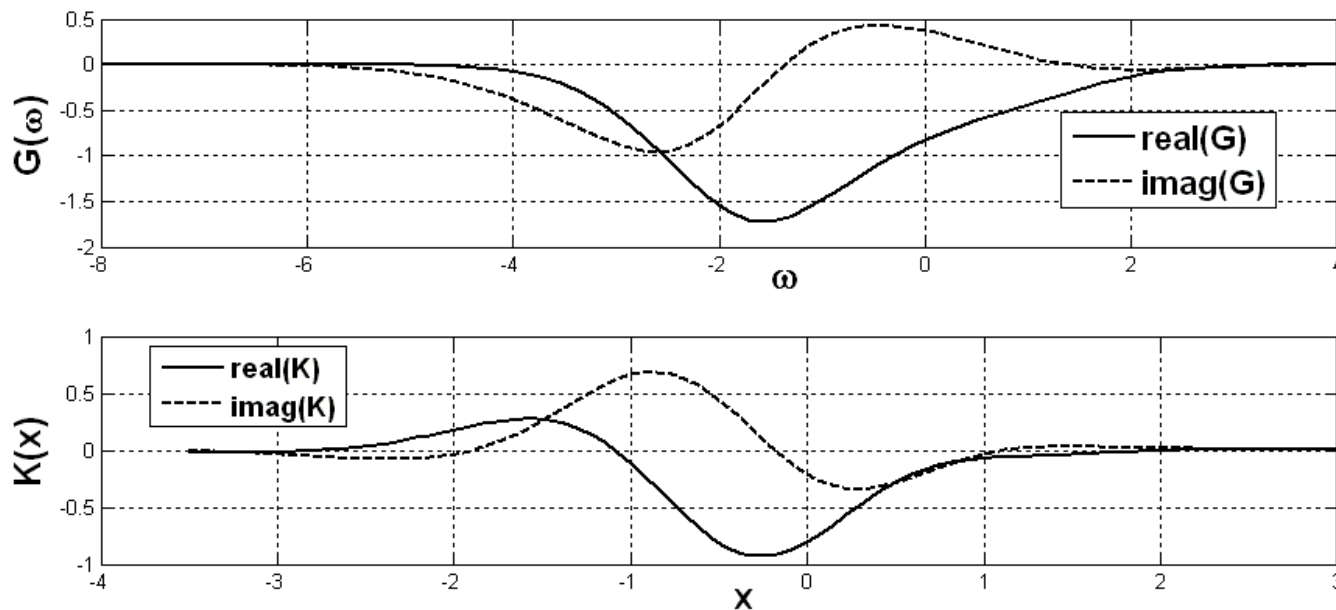


Рисунок 6 – Графики вещественных и мнимых частей функций $G(\omega)$ и $K(x)$, вычисленные для значений: $m = 3$ и $E = 0.5$

Из распределения (37) сразу же находим **коэффициент отражения**:

$$R = \left| \int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta) e^{i k \zeta} d \zeta \right|^2 \quad (41)$$

Коэффициент прохождения будет равен:

$$S = \left| 1 + \int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta) e^{-i k \zeta} d \zeta \right|^2 \quad (42)$$

Эти интегралы записаны с бесконечными пределами и, по крайней мере, один из них можно выразить через спектральную функцию $G(\omega)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{ikx} dx = G(k) = \frac{\lambda \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{2ikx} dx}{1 - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{ik|x|} e^{ikx} dx} \quad (43)$$

Коэффициент отражения

Интеграл, входящий в формулу (42), не выражается подобным же простым образом через спектр $G(\omega)$, однако в книге Ф.М. Морса и Г. Фешбаха доказывается, что между коэффициентами S и R выполняется равенство:

$$S + R = 1 \quad (44)$$

Поэтому имеем следующую *формулу для коэффициента отражения*, выраженную в явном виде через интегралы от потенциального барьера:

$$R = |G(k)|^2 = \left| \frac{\lambda \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{2ikx} dx}{1 - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{ik|x|} e^{ikx} dx} \right|^2 \quad (45)$$

Для *барьера в виде импульса Гаусса* нулевая спектральная функция имеет вид:

$$U_0(x) = e^{-\beta x^2}, \quad B_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{i\omega x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}} \quad (46)$$

Для *прямоугольного импульса с шириной h* , основной спектр определяется следующим образом:

$$U_0(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{h}{2} \\ 1, & -\frac{h}{2} \leq x \leq \frac{h}{2} \\ 0, & x > \frac{h}{2} \end{cases}, \quad B_0(\omega) = \int_{-h/2}^{h/2} e^{i\omega x} dx = h \cdot \begin{pmatrix} \sin \frac{\omega h}{2} \\ \frac{\omega h}{2} \end{pmatrix} \quad (47)$$

Для *барьера обратного квадрату гиперболического косинуса*, имеем:

$$U_0(x) = \frac{1}{ch^2(\sigma x)}, \quad B_0(\omega) = \frac{2}{\sigma} \begin{pmatrix} \frac{\omega \pi}{\sigma} \\ sh \frac{\omega \pi}{\sigma} \end{pmatrix} \quad (48)$$

При численных решениях, использующих метод *сшивки*, для *составных барьеров* часто наблюдались значительные колебания коэффициента отражения R и коэффициента прохождения S с изменением энергии частицы E . Метод носит сугубо численный характер и при его применении трудно понять причину того, почему частица легче проходит через двойной барьер,

Сначала заметим, что если одиночный барьер сдвинуть на расстояние d от начала координат, то его спектр просто умножится на множитель $e^{i\omega d}$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(x-d) e^{i\omega x} dx = e^{i\omega d} \cdot B_0(\omega) \quad (49)$$

Спектр двойного барьера тогда будет равен:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [U(x) + U(x-d)] e^{i\omega x} dx = (1 + e^{i\omega d}) \cdot B_0(\omega) \quad (50)$$

Функция $G(\omega)$, определяемая формулой (37), изменится при этом следующим образом:

$$G(\omega) = \frac{\lambda \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{ix(\omega+k)} dx \cdot (1 + e^{i(\omega+k)d})}{1 - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} [U(x) + U(x-d)] e^{ik|x|} e^{i\omega x} dx} \quad (51)$$

Подставляя в (51) $\omega = k$, получаем следующее выражение для коэффициента отражения:

$$R = |G(k)|^2 = \left| \frac{\lambda \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{2ikx} dx \cdot (1 + e^{2ikd})}{1 - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} [U(x) + U(x-d)] e^{ik|x|} e^{ikx} dx} \right|^2, \quad S = 1 - R \quad (52)$$

Таким образом, наличие множителя $(1+e^{2ikd})$ существенно усложняет спектр двойного барьера, по сравнению со спектром одиночного барьера, и этим объясняется чувствительность коэффициента отражения к параметрам формы потенциального барьера.

Присутствие множителя $(1+e^{2ikd})$ в числителе формулы (52) означает, что коэффициент отражения R должен обращаться в ноль при определенных значениях расстояния d между барьерами. Приравнивая этот множитель нулю, находим:

$$e^{2i k d} = -1 = e^{i \pi (2n+1)}, \quad d = \frac{\pi \left(n + \frac{1}{2} \right)}{k} = \frac{\pi \left(n + \frac{1}{2} \right)}{\sqrt{2 m E}}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (53)$$

Выбирая таким способом расстояние d в формуле (52) мы достигаем эффекта избирательности, т.е. того, что частица с массой m и с энергией E будет свободно проходить, без всякого отражения, через потенциальный барьер, состоящий из двух одинаковых частей.

На рисунке 7 показан результат расчета коэффициента прохождения $S(d)$, вычисленного с использованием формулы (52), при частных значениях массы и энергии: $E=0.5$ и $m_1=3$, $m_2=4$.

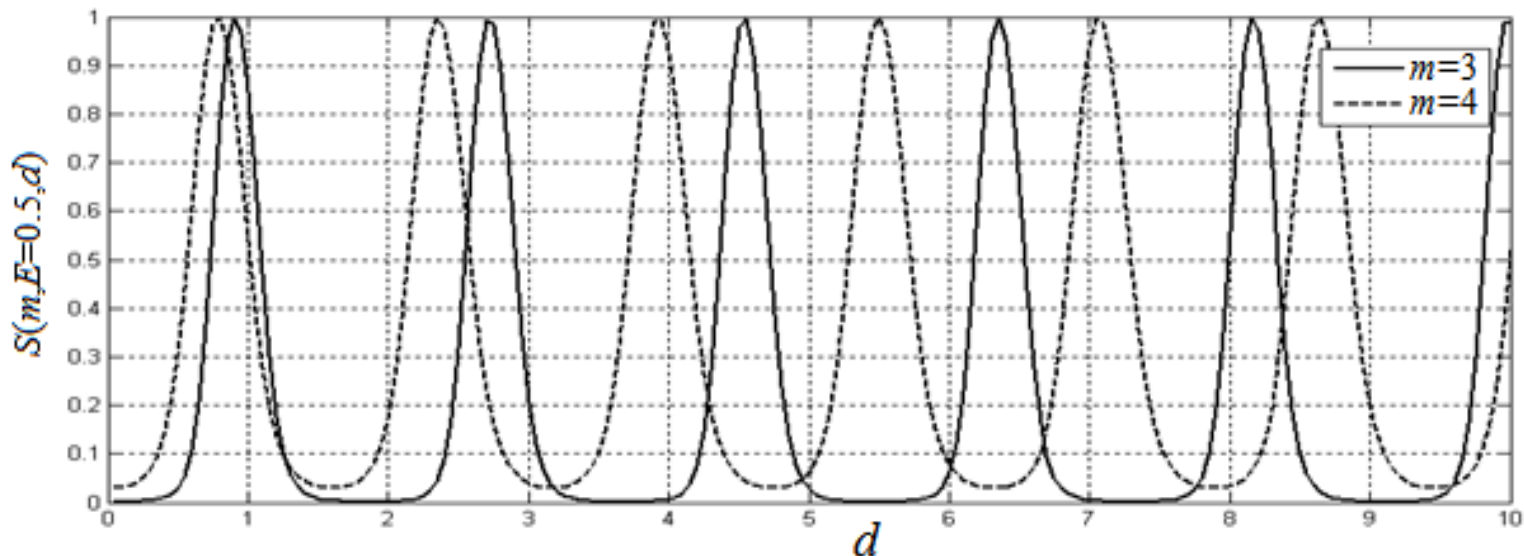


Рисунок 7



Заключение

Показано, что составной барьер является необходимым условием резонанса в системе.

Изменяя расстояние между монослоями можно добиться гиперселективного разделения смеси.

Найдены нули коэффициента полного отражения, что делает мембрану непроницаемой для данной компоненты.



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!