Школьный этап Всероссийской олимпиады по математике

2020-2021 учебный год

10 класс

1. Сравните числа $\sqrt[3]{2019\cdot 2020\cdot 2021}$ и 2020 без использования калькулятора.

2. Для арифметической прогрессии, состоящей из 88 членов, сумма членов с четными номерами равна 35, а сумма членов с нечетными номерами равна 101. Найдите разность этой прогрессии.

3. Окружность касается оснований AB и CD трапеции $ABCD$ в точках A и C и пересекает ее боковые стороны AD и BC в точках E и F соответственно. Найдите угол EAF, если $EF = 4$, $AC = \sqrt{32}$ и $AB < CD$.

4. Уравнение $|ax^2 + bx + c| = 1$ имеет более двух корней, причём все корни этого уравнения являются целыми. Найдите все возможные целые значения a.

5. Четверо депутатов на дебатах хвалятся своими достижениями. Вдруг один из них сказал: «До этого момента на дебатах соврали три раза». Сразу же после этого другой сказал: «А теперь уже четыре раза соврали». Затем третий сказал: «А теперь – пять раз», и наконец, четвертый: «А теперь – шесть раз». Тут дебаты закончились. Оказалось, что по крайней мере один депутат правильно подсчитал, сколько раз соврали до него. Кто из них посчитал правильно, и сколько же всего раз соврали депутаты?

Школьный этап Всероссийской олимпиады по математике

2020-2021 учебный год

10 класс

Решения

1. Сравните числа $\sqrt[3]{2019\cdot 2020\cdot 2021}$ и 2020 без использования калькулятора.

Ответ: $\sqrt[3]{2019\cdot 2020\cdot 2021}<2020$.

Решение.

$$\sqrt[3]{2019\cdot 2020\cdot 2021}=\sqrt[3]{(2020-1)\cdot 2020\cdot (2020+1)}=\sqrt[3]{(2020^2-1)\cdot 2020}<\sqrt[3]{2020^3}=2020.$$

Критерии проверки.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Верно применена формула «разность квадратов», при этом дальнейшие продвижения отсутствуют – 4 балла.

За каждую арифметическую ошибку – снимаем 1 балл.

2. Для арифметической прогрессии, состоящей из 88 членов, сумма членов с четными номерами равна 35, а сумма членов с нечетными номерами равна 101. Найдите разность этой прогрессии.

Ответ. –1,5.

Решение. За каждым членом прогрессии с нечетным номером a_{2n-1} непосредственно следует член прогрессии с четным номером $a_{2n}=a_{2n-1}+d$, где d – разность прогрессии. Следовательно, сумма 44 членов с четными номерами на $44d$ больше суммы 44 членов с нечетными номерами. Имеем уравнение $44d = 35 - 101$, откуда $d = -1,5$.

Критерии проверки.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

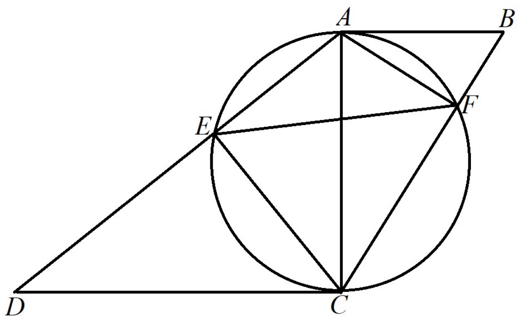
За каждую арифметическую ошибку – снимаем 1 балл.

Ошибка в знаке разности прогрессии – снимаем 4 балла.

3. Окружность касается оснований AB и CD трапеции $ABCD$ в точках A и C и пересекает ее боковые стороны AD и BC в точках E и F соответственно. Найдите угол EAF, если $EF = 4$, $AC = \sqrt{32}$ и $AB < CD$.

Ответ. 135°.

Решение. Проведем радиусы AO и CO. Так как окружность касается прямых AB и CD в точках A и C, то $AO \perp AB$ и $CO \perp CD$. Тогда из параллельности AB и CD следует, что AC – это высота трапеции и диаметр окружности. Значит, радиус окружности $R = \dfrac{\sqrt{32}}{2} = 2\sqrt{2}$.



По теореме синусов для треугольника EAF имеем $\dfrac{EF}{\sin \angle EAF} = 2R$. Значит, $\sin \angle EAF = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $\angle EAF = 45^\circ$ или $\angle EAF = 135^\circ$.

Докажем, что угол EAF является тупым. Углы AEC и AFC прямые, как опирающиеся на диаметр. Имеем $\angle EAF = \angle EAC + \angle FAC = \angle EAC + (90^\circ - \angle ACF) = 90^\circ + (\angle EAC - \angle ACF)$. Осталось показать, что $\angle EAC > \angle ACF$. Это вытекает из того, что $\operatorname{tg} \angle EAC = \dfrac{CD}{AC} > \operatorname{tg} \angle ACF = \dfrac{AB}{AC}$.

Таким образом, $\angle EAF = 135^\circ$.

Критерии проверки.

Доказано, что AC является диаметром окружности, при этом дальнейшие продвижения отсутствуют – 1 балл.

Получен только ответ 45° исходя из верно найденного значения синуса искомого угла, при этом без доказательства утверждается, что AC является диаметром окружности, – 2 балла; при наличии доказательства того, что AC является диаметром окружности, – 3 балла.

Найдено два значения искомого угла 45° и 135° и утверждается, что они оба возможны, при этом без доказательства утверждается, что AC является диаметром окружности, – 3 балла; при наличии доказательства того, что AC является диаметром окружности, – 4 балла.

Получен только ответ 135° исходя из верно найденного значения синуса искомого угла, и нет обоснования того, что это значение единственно возможное, при этом в решении без доказательства утверждается, что AC является диаметром окружности – 4 балла; при наличии доказательства того, что AC является диаметром окружности, – 5 баллов.

Получен только ответ 135° исходя из верно найденного значения синуса искомого угла и обосновано, что это значение единственно возможное, при этом в решении без доказательства утверждается, что AC является диаметром окружности – 6 баллов; при наличии доказательства того, что AC является диаметром окружности, – 7 баллов.

4. Уравнение $|ax^2 + bx + c| = 1$ имеет более двух корней, причём все корни этого уравнения являются целыми. Найдите все возможные целые значения a.

Ответ. ±1; ±2.

Решение. Уравнение $|ax^2 + bx + c| = 1$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} ax^2 + bx + (c-1) = 0 \\ ax^2 + bx + (c+1) = 0 \end{array}\right.$.

При $a = 0$ эта совокупность имеет либо два корня, либо бесконечно много корней, не все из которых целые. При $a \neq 0$ по теореме Виета произведения корней этих уравнений равны $\frac{c-1}{a}$ и $\frac{c+1}{a}$, а значит, число $\frac{2}{a} = \frac{c+1}{a} - \frac{c-1}{a}$ является целым. Тогда a может принимать только такие целые значения: ±1; ±2.

Уравнения $|x^2 + 3x + 1| = 1$, $|-x^2 - 3x - 1| = 1$, $|2x^2 - 1| = 1$ и $|-2x^2 + 1| = 1$показывают, что все эти значения удовлетворяют условию задачи.

Критерии проверки.

Только верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Верный ответ (все 4 значения a) с проверкой, что все они подходят, – 3 балла.

Задача сведена к верной совокупности уравнений, при этом дальнейшие продвижения отсутствуют – 1 балл.

С помощью верных рассуждений найдены все 4 возможных значения a, при этом нет проверки того, что все они подходят, – 5 баллов.

С помощью верных рассуждений найдены все 4 возможных значения a и проведена проверка, что все они подходят, – 7 баллов.

Если в предыдущих двух вариантах решения отсутствует разбор случая, когда $a = 0$, то снимается 1 балл.

За каждое пропущенное верное значение a и за каждое ошибочно найденное значение a оценка снижается на 1 балл.

5. Четверо депутатов на дебатах хвалятся своими достижениями. Вдруг один из них сказал: «До этого момента на дебатах соврали три раза». Сразу же после этого другой сказал: «А теперь уже четыре раза соврали». Затем третий сказал: «А теперь – пять раз», и наконец, четвертый: «А теперь – шесть раз». Тут дебаты закончились. Оказалось, что по крайней мере один депутат правильно подсчитал, сколько раз соврали до него. Кто из них посчитал правильно, и сколько же всего раз соврали депутаты?

Ответ. первый; 6 раз.

Решение. Рассмотрим три случая в зависимости от количества ложных высказываний, произнесенных до фразы первого депутата «До этого момента на дебатах соврали три раза».

1) Предположим, что было менее трех ложных высказываний. Тогда после фразы первого депутата их стало менее четырех, после фразы второго – менее пяти, и после фразы третьего –

менее шести. Значит, все депутаты неправильно посчитали количество обманов, что противоречит условию. Следовательно, этот случай невозможен.

2) Предположим, что было более трех ложных высказываний. Тогда после фразы первого депутата их стало более четырех, после фразы второго – более пяти, и после фразы третьего – более шести. Значит, все депутаты неправильно посчитали количество обманов, что противоречит условию. Следовательно, этот случай также невозможен.

3) Предположим теперь, что было ровно три ложных высказывания. Тогда первый депутат посчитал правильно, а остальные – неправильно, т.е. их высказывания тоже ложны. Получаемся, что всего депутаты соврали 6 раз.

Так как возможен только случай 3), то он дает единственный ответ к задаче.

Критерии проверки.

Доказана невозможность случая 1) – 2 балла.

Доказана невозможность случая 2) – 2 балла.

Ответ с проверкой, что он удовлетворяет условию (т.е. случай 3), – 3 балла.

Баллы за отдельные случаи складываются.

Только ответ – 0 баллов.