Школьный этап Всероссийской олимпиады по математике

2020-2021 учебный год

11 класс

1. Сравните числа $\sin\cos 0$ и $\cos\sin 0$ без использования калькулятора.

2. Решите неравенство $(x^4-2x^2)(x^4-2x^2+1)(x^4-2x^2+2)...(x^4-2x^2+100)\geq 0$.

3. Боковые грани параллелепипеда – прямоугольники, а основание – параллелограмм с острым углом α. Меньшая диагональ параллелепипеда равна большей диагонали основания. Найдите отношение квадрата высоты параллелепипеда к площади его основания.

4. Число 2^{2020} является n-значным, а число 5^{2020} является m-значным. Найдите $n+m$ без использования калькулятора.

5. В 11 классе изучают 14 предметов. В понедельник 6 уроков, причем некоторые из них могут быть сдвоенными. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник? (Никакой предмет не может занимать более двух уроков за день, причем, если он занимает два урока, то эти уроки идут непосредственно друг за другом.)

Школьный этап Всероссийской олимпиады по математике

2020-2021 учебный год

11 класс

Решения

1. Сравните числа $\sin\cos 0$ и $\cos\sin 0$ без использования калькулятора.

Ответ: $\sin\cos 0 < \cos\sin 0$.

Решение. $\sin\cos 0 = \sin 1 < 1$, поскольку угол в 1 радиан расположен в первой четверти, а значит, не совпадает с углами вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ни при каком целом *k*. С другой стороны, $\cos\sin 0 = \cos 0 = 1$. Следовательно, $\sin\cos 0 < \cos\sin 0$.

Критерии проверки.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

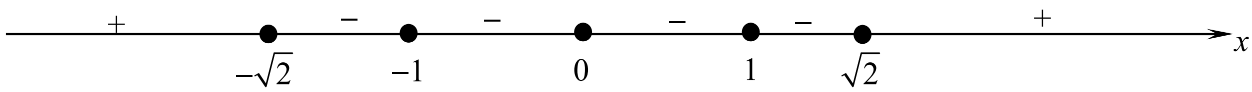
Верно вычислен $\cos\sin 0$ – 1 балл.

Верно оценен $\sin\cos 0$ – 3 балла.

2. Решите неравенство $(x^4 - 2x^2)(x^4 - 2x^2 + 1)(x^4 - 2x^2 + 2)\ldots(x^4 - 2x^2 + 100) \geq 0$.

Ответ. $x \in (-\infty; -\sqrt{2}] \cup \{-1; 0; 1\} \cup [\sqrt{2}; +\infty)$.

Решение. При $k \geq 2$ выражения $x^4 - 2x^2 + k = (x^2 - 1)^2 + (k - 1)$ всегда положительны, а значит, на них можно разделить обе части исходного неравенства. Получим равносильное неравенство $(x^4 - 2x^2)(x^4 - 2x^2 + 1) \geq 0$. Разложим на множители $x^2(x^2 - 2)(x^2 - 1)^2 \geq 0$, и решим методом интервалов.



Критерии проверки.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Доказана положительность всех множителей, кроме первых двух, при этом дальнейшие продвижения отсутствуют – 2 балла.

Деление обеих частей неравенства на положительные множители, при этом их положительность не доказана, – снимаем 2 балла.

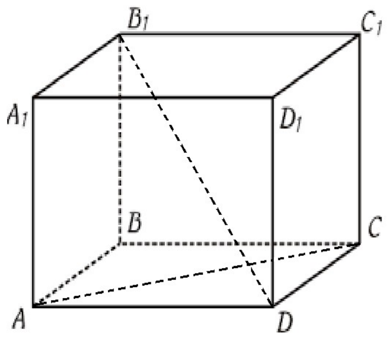
Деление обеих частей неравенства на множители, которые могут обращаться в ноль, – снимаем 4 балла.

При правильной схеме метода интервалов потеряны изолированные точки в ответе – снимаем 3 балла.

Ошибка в расстановке знаков при применении метода интервалов – снимаем 5 баллов.

3. Боковые грани параллелепипеда – прямоугольники, а основание – параллелограмм с острым углом α. Меньшая диагональ параллелепипеда равна большей диагонали основания. Найдите отношение квадрата высоты параллелепипеда к площади его основания.

Ответ. $4\operatorname{ctg}\alpha$.



Решение. Пусть a, b – стороны основания, $d = AC = B_1D$ – большая диагональ основания и меньшая диагональ параллелепипеда, $h = BB_1$ – высота параллелепипеда, S – площадь основания. Тогда из теорем косинусов для треугольников ABC и ABD имеем $d^2 = AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha)$ и $BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$ соответственно. Применив теперь теорему Пифагора для треугольника B_1BD, можем записать $d^2 = B_1D^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha + h^2$.

Приравняем два найденных выражения для d^2 и воспользуемся формулой приведения: $a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha + h^2$. Значит, $h^2 = 4ab\cos\alpha$.

Площадь параллелограмма, лежащего в основании параллелепипеда, вычисляется по формуле $S = ab\sin\alpha$. Осталось найти искомое отношение: $\dfrac{h^2}{S} = \dfrac{4ab\cos\alpha}{ab\sin\alpha} = 4\operatorname{ctg}\alpha$.

Критерии проверки.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Правильно выражена площадь основания параллелепипеда, при этом дальнейшие продвижения отсутствуют – 2 балла.

Правильно выражен квадрат высоты параллелепипеда, при этом дальнейшие продвижения отсутствуют – 4 балла.

Ошибка в формуле приведения – снимаем 2 балла.

4. Число 2^{2020} является n-значным, а число 5^{2020} является m-значным. Найдите $n + m$ без использования калькулятора.

Ответ. 2021.

Решение. Из условия n-значности числа 2^{2020} следует справедливость неравенств $10^{n-1} \le 2^{2020} \le 10^n$. Так как при этом натуральная степень двойки не может совпадать с натуральной степенью десятки (у этих чисел разные разложения на простые множители), то неравенство строгое, т.е. $10^{n-1} < 2^{2020} \le 10^n$. Аналогично, $10^{m-1} < 5^{2020} \le 10^m$.

Перемножив эти неравенства, получим $10^{n+m-2} < 10^{2020} \le 10^{n+m}$, откуда в силу монотонности показательной функции следует, что $n + m - 2 < 2020 < n + m$. Значит, $n + m < 2022$ и $n + m > 2020$. Таким образом, $n + m = 2021$.

Критерии проверки.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Получены искомые двойные неравенства для чисел 2^{2020} и 5^{2020} (возможно, с нестрогим знаком ≤), при этом дальнейшие продвижения отсутствуют – 3 балла.

Используются строгие неравенства (со знаком <), но переход к ним не обоснован – снимаем 2 балла.

5. В 11 классе изучают 14 предметов. В понедельник 6 уроков, причем некоторые из них могут быть сдвоенными. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник? (Никакой предмет не может занимать более двух уроков за день, причем, если он занимает два урока, то эти уроки идут непосредственно друг за другом.)

Ответ. $A_{14}^6+5A_{14}^5+6A_{14}^4+A_{14}^3=3509688.$

Решение. Рассмотрим несколько случаев, предварительно заметив, что порядок выбора урока важен.

1). В понедельник нет сдвоенных уроков. Количество таких возможных расписаний равно $A_{14}^6=14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9=2162160$ (т.е. первый урок можно выбрать 14 способами, второй – 13 способами, …, шестой – 9 способами).

2). В понедельник три пары сдвоенных уроков. Количество таких возможных расписаний равно $A_{14}^3=14\cdot13\cdot12=2184$ (т.е. первую пару можно выбрать 14 способами, вторую – 13 способами, третью – 12 способами).

3). В понедельник одна пара сдвоенных уроков и четыре обычных урока. Тогда необходимо выбрать 5 предметов, а затем из них один предмет, который удваивается. Значит, количество таких возможных расписаний равно $A_{14}^5\cdot5=14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot5=1201200$.

4). В понедельник две пары сдвоенных уроков и два обычных урока. Тогда необходимо выбрать 4 предмета, а затем из них два предмета, которые удваиваются. Из четырех предметов A, B, C, D выбрать два сдвоенных урока можно 6 способами: AB, AC, AD, BC, BD, CD (это можно было вычислить и непосредственно $C_4^2=6$). Значит, количество таких возможных расписаний равно $A_{14}^4\cdot6=14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot6=144144$.

Найдем общее количество расписаний: 2162160 + 2184 + 1201200 + 144144 = 3509688.

Критерии проверки.

Правильно рассмотренный случай 1) – 1 балл.

Правильно рассмотренный случай 2) – 1 балл.

Правильно рассмотренный случай 3) – 2 балл.

Правильно рассмотренный случай 4) – 3 балл.

Баллы за рассмотренные случаи складываются.

Ответ можно записывать в виде суммы размещений с некоторыми коэффициентами, досчитывать ответ до окончательной числовой формы не обязательно.

За каждую арифметическую ошибку – снимаем 1 балл.