

Школьный этап Всероссийской олимпиады по математике

2020-2021 учебный год

8 класс

1. Сравните числа 3^{2020} и 2^{3030} без использования калькулятора.

2. Любитель геометрии начертил окружность и отметил на ней 6 различных точек. Затем каждую пару отмеченных точек он соединил отрезком. Оказалось, что никакие три из этих отрезков не пересекаются в одной точке внутри окружности. На сколько частей проведенные отрезки разделили круг?

3. Найдите остаток от деления числа $123456789^3 + 987654321^3$ на число 111111111.

4. Количество одинаковых товаров, поставляемых в розничную сеть магазинов пятью фирмами, находится в отношении 6:7:8:9:10. Первая фирма планирует сократить поставки на 1%, вторая – на 2%, третья – на 3% и четвертая – на 4%. На сколько процентов нужно увеличить поставки пятой фирме, чтобы суммарный объем поставок не изменился?

5. Учитель записал на доске 11 различных натуральных чисел, не больших 30, и попросил ученика для каждой пары записанных на доске чисел вычесть из большего числа меньшее, и результат записать в тетрадь. Докажите, что некоторое число в тетради у ученика повторится не менее трех раз.

Школьный этап Всероссийской олимпиады по математике

2020-2021 учебный год

8 класс

Решения

1. Сравните числа 3^{2020} и 2^{3030} без использования калькулятора.

Ответ. $3^{2020} > 2^{3030}$.

Решение. По свойству степеней $3^{2020} = 3^{2 \cdot 1010} = (3^2)^{1010} = 9^{1010}$ и $2^{3030} = 2^{3 \cdot 1010} = (2^3)^{1010} = 8^{1010}$.

Так как $9^{1010} > 8^{1010}$, то $3^{2020} > 2^{3030}$.

Критерии проверки.

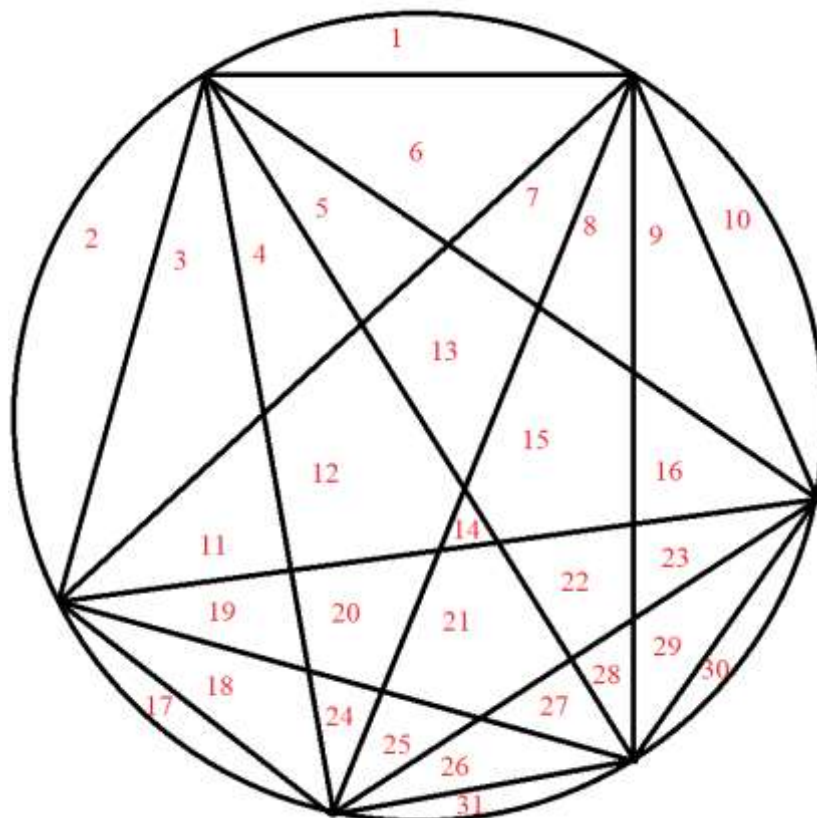
Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Верно преобразовано хотя бы одно из выражений 3^{2020} или 2^{3030} к показателю 1010 или 505, при этом дальнейшее продвижение отсутствует – 3 балла.

2. Любитель геометрии начертил окружность и отметил на ней 6 различных точек. Затем каждую пару отмеченных точек он соединил отрезком. Оказалось, что никакие три из этих отрезков не пересекаются в одной точке внутри окружности. На сколько частей проведенные отрезки разделили круг?

Ответ: 31.

Решение. Смотри рисунок.



Критерии проверки.

Правильный чертеж, но ошибка в подсчете количества частей – 3 балла.

Правильный чертеж и верный подсчет количества частей – 7 баллов.

3. Найдите остаток от деления числа $123456789^3 + 987654321^3$ на число 111111111.

Ответ. 0.

Решение. Разложим числовое выражение $123456789^3 + 987654321^3$ на множители с помощью формулы сокращенного умножения «сумма кубов»: $123456789^3 + 987654321^3 = (123456789 + 987654321) \cdot (123456789^2 - 123456789 \cdot 987654321 + 987654321^2)$. В первой скобке этого разложения записано число $123456789 + 987654321 = 1111111110$, которое при делении на 111111111 дает частное 10 и остаток 0. Следовательно, и все выражение $123456789^3 + 987654321^3$ делится на число 111111111 без остатка.

Критерии проверки.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Верно применена формула «сумма кубов», при этом дальнейшее продвижение отсутствует – 3 балла.

Верно применена формула «сумма кубов» и подсчитана сумма $(123456789 + 987654321)$, при этом дальнейшее продвижение отсутствует – 5 баллов.

4. Количество одинаковых товаров, поставляемых в розничную сеть магазинов пятью фирмами, находится в отношении 6:7:8:9:10. Первая фирма планирует сократить поставки на 1%, вторая – на 2%, третья – на 3% и четвертая – на 4%. На сколько процентов нужно увеличить поставки пятой фирме, чтобы суммарный объем поставок не изменился?

Ответ. 8.

Решение. Первоначально общий объем поставок составлял 40 частей, 6 из которых приходится на первую фирму, 7 – на вторую, 8 – на третью, 9 – на четвертую, 10 – на пятую.

Затем первая фирма сократила поставки на 1% от 6 частей, т.е. на $0,01 \cdot 6 = 0,06$ частей. Аналогично, вторая фирма сократила на $0,02 \cdot 7 = 0,14$ частей. Из тех же соображений, сокращения поставок для третьей и четвертой фирм соответственно составили $0,03 \cdot 8 = 0,24$ и $0,04 \cdot 9 = 0,36$ частей. Общий объем сокращения этих четырех фирм равен $0,06 + 0,14 + 0,24 + 0,36 = 0,8$ частей. Значит, пятой фирме нужно увеличить поставки на 0,8 частей. Найдём, сколько процентов составляет 0,8 от 10: $\frac{0,8}{10} \cdot 100\% = 8\%$.

Критерии проверки.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Правильно подсчитаны новые доли поставок первых четырех фирм, при этом дальнейшее продвижение отсутствует – 5 баллов.

За каждую арифметическую ошибку – снимаем 1 балл.

5. Учитель записал на доске 11 различных натуральных чисел, не больших 30, и попросил ученика для каждой пары записанных на доске чисел вычесть из большего числа меньшее, и результат записать в тетрадь. Докажите, что некоторое число в тетради у ученика повторится не менее трех раз.

Решение. Обозначим числа учителя, предварительно упорядочив их по возрастанию: $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8 < a_9 < a_{10} < a_{11}$.

Предположим, что все числа ученика либо не повторяются, либо повторяются менее трех раз. Тогда среди десяти разностей $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, a_5 - a_4, a_6 - a_5, a_7 - a_6, a_8 - a_7, a_9 - a_8, a_{10} - a_9, a_{11} - a_{10}$ не более двух раз встречается значение 1, не более двух раз встречается значение 2 и т.д. Значит, сумма этих разностей $S \geq 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 = 30$.

С другой стороны, $S = a_{11} - a_1 \leq 30 - 1 = 29$. Противоречие.

Критерии проверки.

Обоснованно получена оценка $S \leq 29$ – 3 балла.

Обоснованно получена оценка $S \geq 30$ – 4 балла.

Баллы за обоснованно полученные оценки складываются.