

Школьный этап Всероссийской олимпиады по математике

2020-2021 учебный год

9 класс

1. Докажите, что уравнение $2x^2 + 7x + 1 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2 . Вычислите значение выражения $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$. Ответ не должен содержать корней и степеней с дробным показателем.
2. Найдите все такие кратные трем трехзначные числа, которые после вычеркивания в них первой цифры уменьшаются в 26 раз (если при вычеркивании первой цифры получается число, начинающееся с нуля, то вычеркиваем и этот ноль).
3. Про трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC известно, что CD перпендикулярно основаниям и $CD = AD + BC$. Найдите отношение, в котором биссектриса угла C делит сторону AB .
4. Две бригады, работая вместе, строят типовой коттедж за 12 дней. Если же обе бригады проработают вместе только 4 дня, то второй бригаде для окончания строительства понадобится еще 20 дней. За сколько дней сможет построить типовой коттедж первая бригада?
5. Какое наибольшее число коней можно расположить на шахматной доске 8×8 так, что после того, как все кони сделают по одному ходу, расстояние между любыми двумя конями увеличится? Шахматный конь ходит буквой «Г», т.е. на две клетки в одну сторону (вправо, влево, вверх или вниз) и затем на одну клетку в перпендикулярном направлении. Расстоянием между конями считаем расстояние между центрами клеток, на которых они стоят.

Школьный этап Всероссийской олимпиады по математике

2020-2021 учебный год

9 класс

Решения

1. Докажите, что уравнение $2x^2 + 7x + 1 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2 . Вычислите значение выражения $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$. Ответ не должен содержать корней и степеней с дробным показателем.

Ответ: -7 .

Решение. Вычислим дискриминант данного квадратного уравнения: $D = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 49 - 8 = 41$. Так как дискриминант положителен, то уравнение имеет два различных корня.

Первый способ. Выражение $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ после приведения дробей к общему знаменателю приобретает вид $\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$. Так как по теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{7}{2}$ и $x_1 x_2 = \frac{1}{2}$, то $\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{7}{2} : \frac{1}{2} = -7$.

Второй способ. Найдем корни уравнения: $x_1 = \frac{-7 - \sqrt{41}}{4}$ и $x_2 = \frac{-7 + \sqrt{41}}{4}$. Тогда $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{4}{-7 - \sqrt{41}} + \frac{4}{-7 + \sqrt{41}} = \frac{4(-7 + \sqrt{41}) + 4(-7 - \sqrt{41})}{(-7 - \sqrt{41})(-7 + \sqrt{41})} = \frac{-28 + 4\sqrt{41} - 28 - 4\sqrt{41}}{(-7)^2 - (\sqrt{41})^2} = \frac{-56}{8} = -7$.

Критерии проверки.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Нет доказательства существования двух корней – снимаем 3 балла.

Ошибка в знаке при применении теоремы Виета – снимаем 4 балла.

За каждую арифметическую ошибку – снимаем 1 балл.

Правильно найдены корни, при этом дальнейшие продвижения отсутствуют – 2 балла.

2. Найдите все такие кратные трем трехзначные числа, которые после вычеркивания в них первой цифры уменьшаются в 26 раз (если при вычеркивании первой цифры получается число, начинающееся с нуля, то вычеркиваем и этот ноль).

Ответ. 312, 624, 936.

Решение. Первый способ. Обозначим первую цифру трехзначного числа через x , а число, получающееся после вычеркивания первой цифры этого числа, – через y . Тогда исходное трехзначное число равно $100x + y$. Имеем уравнение $100x + y = 26y$. Упрощаем: $4x = y$.

Число $100x + y = 104x$ кратно трем тогда и только тогда, когда x кратно 3. Так как x – это ненулевая цифра, то $x = 3$, $x = 6$ или $x = 9$, и соответственно, $y = 12$, $y = 24$ или $y = 36$.

Второй способ. Из условия следует, что искомые трехзначные числа кратны 3 и кратны 26. Так как числа 3 и 26 взаимно просты, то искомые числа кратны $3 \cdot 26 = 78$. Осталось перебрать числа $2 \cdot 78 = 156$, $3 \cdot 78 = 234$, $4 \cdot 78 = 312$, ..., $12 \cdot 78 = 936$.

Критерии проверки.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Только верный ответ без каких-либо рассуждений об отсутствии других решений – 2 балла.

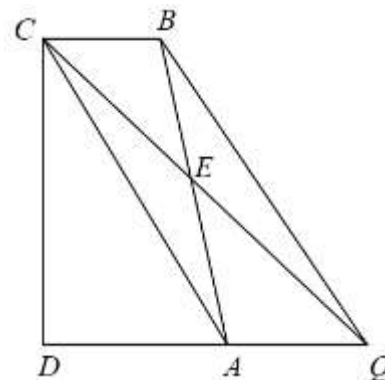
За каждое потерянное решение или добавленное лишнее решение – снимаем 2 балла.

За каждую арифметическую ошибку – снимаем 1 балл.

3. Про трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC известно, что CD перпендикулярно основаниям и $CD = AD + BC$. Найдите отношение, в котором биссектриса угла C делит сторону AB .

Ответ. 1:1.

Решение. Первый способ. Обозначим пересечение биссектрисы угла BCD с прямой AD за Q . Углы BCD и CDQ прямые, поэтому треугольник CDQ – прямоугольный равнобедренный и длина отрезка DQ равна длине высоты CD , то есть сумме длин AD и BC . Следовательно, точка Q расположена на продолжении основания AD за точку A и длина отрезка AQ равна длине основания BC . Значит, четырехугольник $BCAQ$ является параллелограммом и биссектриса CQ угла BCD , являющаяся в нем диагональю, делит боковую сторону AB , являющаяся в нем другой диагональю, пополам.



Второй способ. Введем прямоугольную систему координат: начало координат расположим в точке C , ось абсцисс направим вдоль стороны CD , ось ординат – вдоль стороны CB . Обозначим длины оснований CB и AD через a и b соответственно. Найдём координаты вершин трапеции: $C(0; 0)$, $B(0; a)$, $D(a + b; 0)$, $A(a + b; b)$. Тогда уравнение прямой AB имеет вид $y = \frac{b-a}{b+a}x + a$ (это уравнение можно было найти, либо подставив в общую формулу уравнения прямой $y = kx + l$ координаты точек A и B , либо непосредственно определив по чертежу угловой коэффициент k и начальную ординату l). Биссектриса угла C имеет уравнение $y = x$.

Из уравнения $x = \frac{b-a}{b+a}x + a$ находим абсциссу точки пересечения биссектрисы угла C и стороны AB . Имеем $x = \frac{a+b}{2}$, а значит, данная точка является серединой стороны AB .

Критерии проверки.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Доказано, что Q расположена на продолжении основания AD за точку A и длина отрезка AQ равна длине основания BC , при этом дальнейшие продвижения отсутствуют – 3 балла.

Если не доказано, что Q расположена на продолжении основания AD за точку A – снимаем 2 балла.

4. Две бригады, работая вместе, строят типовой коттедж за 12 дней. Если же обе бригады проработают вместе только 4 дня, то второй бригаде для окончания строительства понадобится еще 20 дней. За сколько дней сможет построить типовой коттедж первая бригада?

Ответ. 20.

Решение. Так как две бригады, работая 12 дней, построят весь коттедж, то за 4 дня они успеют выполнить только треть строительных работ. Следовательно, оставшиеся две трети вторая бригада выполнит за 20 дней, а значит, за один день вторая бригада строит $\frac{2}{3} : 20 = \frac{1}{30}$ часть дома (т.е. производительность второй бригады равна $\frac{1}{30}$).

Вместе обе бригады за день строят $\frac{1}{12}$ часть дома. Тогда первая бригада за день строит

$\frac{1}{12} - \frac{1}{30} = \frac{1}{20}$ часть дома. Таким образом, весь коттедж первая бригада построит за 20 дней.

Критерии проверки.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Только ответ без каких-либо рассуждений – 0 баллов.

Ответ с полной проверкой, что он удовлетворяет условию, – 6 баллов.

Найдено, что вторая бригада выполняет $2/3$ работ, при этом дальнейшие продвижения отсутствуют – 2 балла.

Составлена верная математическая модель (например, в виде системы уравнений), при этом дальнейшие продвижения отсутствуют – 4 балла.

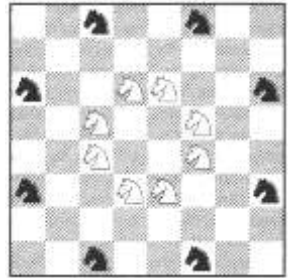
За каждую арифметическую ошибку – снимаем 1 балл.

5. Какое наибольшее число коней можно расположить на шахматной доске 8×8 так, что после того, как все кони сделают по одному ходу, расстояние между любыми двумя конями увеличится? Шахматный конь ходит буквой «Г», т.е. на две клетки в одну сторону (вправо, влево, вверх или вниз) и затем на одну клетку в перпендикулярном направлении. Расстоянием между конями считаем расстояние между центрами клеток, на которых они стоят.

Ответ. 8.

Решение. Конь может сделать не более восьми различных ходов. Следовательно, если коней более восьми, то хотя бы два из них сделают одинаковые ходы, и расстояние между этими двумя конями не изменится.

На рисунке показан пример для 8 коней: белые фигуры – исходное положение коней, черные фигуры – положение после сделанного хода.



Критерии проверки.

Обоснованная оценка, что коней не более 8, – 3 балла.

Пример на 8 коней – 4 балла.

Баллы за оценку и пример складываются.